Matemáticas I

(Soluciones a los problemas del Tema 1)

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ consideramos los vectores $(1,1,0,a)$, $(3,-1,b,-1)$ y $(-3,5,a,-4)$. Determinar los valores de a y b para que estos vectores sean linealmente dependientes y dar la combinación lineal que los liga.

SOLUCIÓN: Llamamos a los vectores, respectivamente, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, y los colocamos por filas formando una matriz. Los vectores serán linealmente dependientes si el rango de la familia de vectores (el mando de la matriz) es menor que el número de vectores. Escalonamos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 3 & -1 & b & -1 \\ -3 & 5 & a & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -4 & b & -(1+3a) \\ 0 & 8 & a & -4+3a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -4 & b & -(1+3a) \\ 0 & 0 & a+2b & -3(2+a) \end{pmatrix}$$

Los vectores (filas) de la segunda matriz son $\vec{u}$ (en la primera fila), $\vec{v}-3\vec{u}$ (en la segunda fila) y $\vec{w}+3\vec{u}$ (en la tercera fila). En la tercera matriz los dos primeros vectores coinciden con los de la segunda matriz, mientras que el tercero está dado por $\vec{w}+3\vec{u}+2(\vec{v}-3\vec{u}) = -3\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ (la tercera fila es igual a la tercera fila más dos veces la segunda). Las dos primeras filas dejan claro que el rango de la matriz será al menos 2, así que habrá dependencia lineal cuando el rango no sea 3, es decir, cuando $a+2b=0$ y $2+a=0$, es decir, $a=-2$ y $b=1$. En este caso, la tercera fila, que es el vector nulo, nos da la combinación lineal que los liga: $-3\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=0$.

2. Encontrar el valor de a para que el vector $(1,5,a)$ pertenezca al subespacio engendrado por los vectores $(3,1,-1)$, $(-1,2,0)$ y $(0,7,-1)$. Asimismo, determinar, según los valores de t, cuándo son linealmente independientes los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$: $(1,t,1)$, $(1,1,t)$ y $(t,1,1)$.

SOLUCIÓN: Tomamos los vectores $\vec{u}=(-1,2,0)$, $\vec{v}=(0,7,-1)$ y $\vec{w}=(3,1,-1)$ y los colocamos por filas formando una matriz que escalonaremos, usando el método de Gauss. De aquí obtenemos inmediatamente que $\vec{w}=-3\vec{u}+\vec{v}$, así que el vector $\vec{w}$ es superfluo para generar el subespacio, que es de la forma $S=\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$. Veamos ahora si $\vec{x}=(1,5,a)$ pertenece a S. Para ello tenemos que comprobar que el rango de la familia de vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{x}$ es 2. Determinamos el rango de la familia, escalonando, mediante el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 1 & 5 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

El rango será dos cuando el último vector fila sea igual a $\vec{0}$, y esto sucede cuando $a=-1$, es decir, $\vec{x}$ pertenece al subespacio S si $a=-1$, siendo entonces $\vec{x}=-\vec{u}+\vec{v}$.

Para resolver el segundo apartado usaremos el hecho de que una matriz cuadrada tiene rango máximo si su determinante es distinto de 0. En ese caso, los vectores fila son linealmente independientes. Como tenemos tres vectores de $\mathbb{R}^3$, formamos la matriz que tiene por filas a estos vectores y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix} = t^3-3t+2 = (t-1)^2(t+2).$$

Los vectores son independientes cuando este determinante es no nulo, es decir cuando $t \neq 1, -2$.

3. Consideramos las siguientes familias de vectores:
$A=\{(1,3,2),(1,0,-1),(2,-3,5)\}$; $B=\{(0,2,-1),(4,3,-2),(4,1,-1)\}$;
$C=\{(1,2,1,3),(2,1,4,3),(1,3,2,1)\}$; $D=\{(1,2,-1,1),(3,-1,2,1),(2,-3,-3,0),(4,1,-5,2)\}$.

(a) Determinar cuáles de ellas son linealmente independientes.

(b) Considerar el subespacio generado por cada una de las familias. Hallar bases y dimensiones de cada uno de ellos.

SOLUCIÓN: Las familias A y B se pueden estudiar mediante determinantes, resultando que la familia A es linealmente independiente, pero no la B. La dimensión del subespacio generado por la primera familia es igual al rango de la familia de vectores que es 3 y una base del subespacio es la propia familia. Para la familia B, como el rango de los tres vectores es 2, la dimensión del subespacio es 2 y una base estaría formada por los dos primeros vectores de la familia.
El rango de la familia C es 3, por lo que los 4 vectores no son linealmente independientes. El subespacio que determinan tiene dimensión 3 (igual al rango de la familia) y una base está formada por los tres primeros vectores de la familia. En cuanto a la familia D, el rango de la misma es 3, por lo que los vectores no son linealmente independientes. Engendran un subespacio de dimensión 3 y una base vendría dada por los tres primeros vectores de la familia.

4. Consideramos los vectores $\vec{u} = (4, -5, 7)$, $\vec{v} = (3, -3, 4)$, $\vec{w} = (1, 1, -2)$ y $\vec{z} = (2, -1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. Hallar $S = \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \rangle$. ¿Es $S = \langle (1, -2, 3), (3, 0, -1) \rangle$?

SOLUCIÓN: Calculando el rango de la familia de vectores, usando el método de Gauss para escalonar la matriz que forman, obtenemos que el rango es 2. Así, los vectores forman un subespacio vectorial de dimensión 2, por lo que solo necesitamos dos vectores para formar una base. Estos vectores pueden ser $\vec{w}$ y $\vec{z}$.
Para ver si $\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle = \langle (1, -2, 3), (3, 0, -1) \rangle$ basta con ver si $(1, -2, 3)$ y $(3, 0, -1)$ están en el subespacio generado por $\vec{w}$ y $\vec{z}$, ya que $(1, -2, 3)$ y $(3, 0, -1)$ son linealmente independientes. Ahora bien,

$$(1, -2, 3) = \vec{z} - \vec{w}, \qquad (3, 0, -1) = \vec{z} + \vec{w},$$

por lo que $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{z} \rangle = \langle (1, -2, 3), (3, 0, -1) \rangle$.

5. Decir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$R = \Big\{ (a, b, c, d) \mid a = 0 \Big\}, \quad S = \Big\{ (3a, a, a + b, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \Big\}, \quad T = \Big\{ (a, b, c, d) \mid 2a + 4d = 1 \Big\}.$$

En su caso, hallar una base de los subespacios.

SOLUCIÓN: Se comprueba inmediatamente que R y S son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$, pero T no lo es (lo sería si el término independiente de su ecuación fuera 0). Una base de R es la familia de vectores $\{\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$. Cada vector $\vec{x}$ de S es de la forma $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v}$, siendo $\vec{u} = (3, 1, 1, 0)$ y $\vec{u} = (0, 0, 0, 1)$; estos dos vectores son independientes, luego forman una base de S.

6. Determinar, en los casos en que sea posible, $(AB)C$, $A(BC)$, $(A + B)C$, $A(B + C)$ si:

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ y $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad$ y $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^t$.

SOLUCIÓN:
(i) $A(BC) = (AB)C = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$, $\quad (A + B)C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad A(B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(ii) $(AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} 37 & 40 \\ 11 & -18 \end{pmatrix}$, $A(B + C)$ y $(A + B)C$ no pueden calcularse, al ser las dimensiones de B distintas de las de A y C.

7. Demostrar que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

SOLUCIÓN: $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices cuadradas de orden. Sabemos que

$$AB = C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \begin{cases} 0, \; i \neq j \\ a_{ii} b_{ii}, \; i = j. \end{cases}$$

Esto es así porque A y B son diagonales, es decir $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $b_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

8. Comprobar que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ no conmutan y que $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

SOLUCIÓN: Se calcula $AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y $BA = -AB$, luego no conmutan. La igualdad pedida se puede verificar por cálculo numérico directo o bien demostrarla a partir de la condición $BA = -AB$: $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

9. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, demostrar que $(A+B)^t = A^t + B^t$, $cA^t = (cA)^t$, con $c \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN:

$$(A+B)^t = A^t + B^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad cA^t = (cA)^t = \begin{pmatrix} 2c & 3c \\ c & c \\ -c & 2c \end{pmatrix}.$$

10. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, demostrar que $(AB)^t = B^t A^t$.

SOLUCIÓN:

$$(AB)^t = B^t A^t = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, demostrar que $A + A^t$ y AA^t son matrices simétricas mientras que $A - A^t$ es antisimétrica.

SOLUCIÓN:

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 35 \end{pmatrix}, \quad A - A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se puede probar el resultado para una matriz general A:
(i) $A + A^t$ es simétrica: $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$.
(ii) AA^t es simétrica: $(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$.
(iii) $A - A^t$ es antisimétrica: $(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$.

12. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

- Obtener el conjunto de las matrices cuadradas B tales que $AB = 0$.
- Obtener el conjunto de las matrices cuadradas C tales que $CA = I$.

SOLUCIÓN: $B = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$, donde c y d son números reales cualesquiera. No existe C tal que $CA = I$.

13. Calcular la matriz $C = A + AB + AB^2 + \cdots + AB^{n-1}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN: Como B es diagonal se tiene $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, luego

$$C = A(I + B + B^2 + \cdots + B^{n-1}) = A \begin{pmatrix} 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} \end{pmatrix},$$

es decir,

$$C = A \begin{pmatrix} 2^n - 1 & 0 \\ 0 & \frac{3^n - 1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 3^n - 1 \end{pmatrix}.$$

14. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ 5 & -5 & 0 & 5 \\ 7 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN: Escalonando las matrices por el método de Gauss se obtiene $\mathrm{rg}(A) = 3$, $\mathrm{rg}(B) = 2$ y $\mathrm{rg}(C) = 4$.

15. Estudiar el rango de las siguientes matrices, según los valores de a, b, c, en los casos correspondientes

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN: El determinante de la primera matriz es $a^2 + b^2$, luego el rango no es 2 si $a^2 + b^2 = 0$, pero esto solo sucede si $a = b = 0$. Por tanto si $a = b = 0$ el rango es 0 y en otro caso el rango es 2.
El determinante de la segunda matriz es $3a - 24$. Por tanto el rango es 3 si $a \neq 8$ y si $a = 8$ el rango es 2 (escalonando).
El determinante de la matriz es $(a-1)^2(a+2)$. Así, si $a \neq 1, -2$, el rango es 3. Si $a = 1$ el rango es 1 y es 2 cuando $a = -2$ (escalonando en estos casos).

16. Resolver

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x-5 \\ 4 & 2+x & x \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3x-6 & 4 & x+4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 1+x & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

SOLUCIÓN: En el primer caso se tiene $x^2 - 6x = 0$, es decir $x = 0$ o $x = 6$. Para el segundo caso, resulta $x = 1$. El tercer determinante es igual a $3x^2 - 23x + 25$ y este polinomio se anula cuando

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{229}}{6}.$$

17. Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & -1 \\ a & b & c & d & e & x-f \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}.$$

SOLUCIÓN: Para calcular $|A|$ se escalona la matriz teniendo en cuenta las siguientes tres propiedades de un determinante

- El determinante de una matriz cambia de signo al intercambiar dos filas o columnas entre sí.
- El determinante de una matriz no cambia si a una fila (columna) se le añade una combinación lineal del resto de filas (columnas).
- El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Usando las dos primeras propiedades para escalonar la matriz y la tercera para calcular el determinante, se tiene $|A| = 2$.
Para calcular $|B|$, desarrollamos por los elementos de la primera columna y obtenemos

$$|B| = x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 \\ b & c & d & e & x-f \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 \end{vmatrix}.$$

Observamos que como el segundo determinante es el de una matriz triangular se puede calcular directamente y vale -1, por lo que

$$|B| = x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 \\ b & c & d & e & x-f \end{vmatrix} + a.$$

Repitiendo el procedimiento varias veces se obtiene $|B| = x^6 - fx^5 + ex^4 + dx^4 + cx^2 + bx + a$.

La regla de Sarrus permite obtener directamente $C = 0$. Lo haremos de otros modos:
(i) Una columna es combinación lineal de las otras:

$$(b+c, c+a, a+b) = (a+b+c)(1,1,1) - (a,b,c).$$

(ii) Se puede descomponer C en una suma:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & a \\ 1 & c & b \end{vmatrix}.$$

El primer determinante vale $ab + bc + ca - (a^2 + b^2 + c^2)$ y el segundo toma el valor opuesto.
(iii) Otros cálculos posibles son:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 0 & b-a & a-b \\ 0 & c-a & a-c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

18. Hallar la inversa de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 3/5 & 2/5 \\ 1/5 & -3/5 & 3/5 \\ 1/5 & 2/5 & -2/5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. Calcular el valor de k para que las siguientes matrices tengan inversa. Calcular las inversas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 3 \\ 4 & 1 & -k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 2 & 0 & k \\ k & k & k \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN: Las matrices tendrán inversa cuando su determinante sea distinto de cero. Calculando los determinantes, se tiene para el primer caso

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 3 \\ 4 & 1 & -k \end{vmatrix} = -k^2 + 4k - 3 = .(k-1)(k-3).$$

Por tanto la matriz tiene inversa si $k \neq 1, 3$. En ese caso la inversa es

$$\frac{1}{(k-1)(k-3)} \begin{pmatrix} k^2+3 & 1 & -k \\ -12 & k-4 & 3 \\ 4k & 1 & -k \end{pmatrix}.$$

Para la segunda matriz, el determinante es igual a $k^2(k-1)$. Por tanto la matriz es invertible si y solo si $k \neq 0, 1$. En estos casos, la matriz inversa es:

$$\frac{1}{k(k-1)} \begin{pmatrix} -k & 0 & k \\ k-2 & 1-k & 1 \\ 2 & k-1 & -2 \end{pmatrix}.$$

20. Resolver los siguientes sistemas matriciales:

- $\left\{ Y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Y = X \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

SOLUCIÓN: Para el primer sistema, $X = Y = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.
El segundo sistema no tiene solución.

21. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2y - z = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + y + z + w = 1 \\ x - y + 2z - 3w = 0 \\ 2x + y + 3z + 5w = 0 \\ x + y - z - w = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + 2z - w = 0 \\ 2x + 3y - 4z + 2w = 0 \\ 3x + z - w = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: Detallamos la solución del primer caso, resolviendo el sistema mediante la regla de Cramer y mediante el método de Gauss, escalonando la matriz:

(i) Cramer (el valor de cada una de las incógnitas se obtiene a partir del determinante que resulta de sustituir la columna de los coeficientes de dicha incógnita por la de términos independientes, dividiendo el resultado por el determinante de la matriz de coeficientes). El determinante de la matriz de coeficientes es $\Delta = 3$, luego el sistema tiene solución única, que vienen dada por

$$x = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \; y = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \; z = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

(ii) Gauss. Haciendo triangular la matriz ampliada del sistema resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right).$$

La última ecuación (fila) del sistema triangular equivalente es $3z = 9$, luego $z = 3$. La anterior es $2y - z = 1$, luego $y = 2$. Finalmente, de la primera se obtiene $x = 1$.

Para el segundo sistema la solución es la siguiente

$$x = 11/24, \quad y = -31/48, \quad z = -1/3, \quad w = 7/48.$$

El tercer sistema resulta ser compatible indeterminado y su solución es

$$x = w, \quad y = -4w, \quad z = -2w, \quad w = w.$$

22. Discutir los siguientes sistemas, según los distintos valores de a y b, y resolverlos en los casos posibles:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y + 6z = 0 \\ 2x + y + az = 0 \\ x - 3y - 2z = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x - ay + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ bx - 2y - 5z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ x + (a+1)y - 1 = 0 \\ x + y - b - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} ax + by + z = 0 \\ x + by + az = 0 \\ x + aby + z = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 5x - 11y + 9z = a \\ x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN: Los dos primeros sistemas son homogéneos y, por tanto, siempre son compatibles. A continuación damos las soluciones para cada uno de los dos sistemas

(i) Si $a \neq 40/11$ el sistema es compatible determinado y existe solución única $x = y = z = 0$. Si $a = 40/11$ el sistema es compatible indeterminado con solución $x = -14/11z$, $y = -12/11z$, $z = z$.

(ii) Si $a \neq -1/3$ y $b \neq -11/2$ el sistema es compatible determinado y la solución es $x = y = z = 0$. Si $a = -1/3$ y $b = -111/2$ el sistema es compatible indeterminado y la solución es $x = -2z$, $y = 3z$, $z = z$.

El tercer sistema tiene la apariencia de homogéneo, pero no lo es, ya que los términos independientes se encuentran en la parte izquierda de las ecuaciones. En este caso, si $b \neq 0$ el sistema es incompatible (no tiene solución). Si $b = 0$ y $a \neq 0$ el sistema es compatible determinado y la solución única es $x = 1$, $y = 0$. Si $b = 0$ y $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado y la solución es $x = 1 - y$, $y = y$.

Los siguientes dos sistemas los analizamos con más detalle. Vemos que ambos tienen la misma matriz de coeficientes, solo que el segundo es homogéneo y el primero no. Reordenamos las ecuaciones de manera que la matriz de coeficientes queda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & a \\ 1 & ab & 1 \\ a & b & 1 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|A| = b(1-a)^2(2+a)$. Si el determinante es distinto de cero el sistema será compatible determinado y en otro caso habrá que discutir, según sea el rango de la matriz ampliada.

Caso (i): $|A| \neq 0$, es decir, $b \neq 0$ y $a \neq 1, -2$. Entonces $\mathrm{rg}(A) = 3 = \mathrm{rg}(A|B)$ y ambos sistemas solo tiene la solución única que da la regla de Cramer, que en el caso homogéneo es la solución trivial $(0, 0, 0)$. La solución en el caso general se obtiene también por el método de Gauss aplicado a la matriz ampliada $(A|B)$:

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & (a-1)b & 1-a & b-1 \\ 0 & (1-a)b & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & (a-1)b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & b-a \end{array}\right),$$

de modo que si $|A| \neq 0$ resolver el sistema triangular da

$$z = \frac{b-a}{(1-a)(2+a)}, \quad y = \frac{2 + b(1+a)}{|A|}, \quad x = z.$$

Observación: La igualdad $x = z$ resulta directamente comparando las ecuaciones primera y tercera del sistema para obtener $(a-1)x = (a-1)z$, que da $x = z$ cuando $a \neq 1$.

Veamos la resolución en los demás casos, que corresponden al determinante nulo $|A| = 0$, .

Caso (ii): $a = 1$. Tenemos en este caso:

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right), \quad \text{rg}(A) = 1.$$

La compatibilidad depende de b:

- Si $b = 1$ es $\text{rg}(A) = 1 = \text{rg}(A|B)$, luego el sistema es compatible indeterminado, se reduce a $x + y + z = 1$. Las soluciones vienen dadas por $x = 1 - y - z$, $y = y$, $z = z$, es decir solo se puede determinar una de las incógnitas, que queda en función de las otras dos.
- Si $b \neq 1$ entonces $\text{rg}(A) = 1$ y $\text{rg}(A|B) = 2$, luego el sistema es incompatible.

Para el caso homogéneo el sistema es siempre compatible indeterminado con solución $x = -y - z$.

Caso (iii): $a = -2$. Tenemos en este caso

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & -2 & 1 \\ 0 & -3b & 3 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right), \quad \text{rg}(A) = 2.$$

Vemos $\text{rg}(A|B)$ depende del valor de b y se tiene lo siguiente

- Si $b \neq -2$ entonces $\text{rg}(A|B) = 3$, luego el sistema es incompatible.
- Si $b = -2$ se tiene $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A|B)$, luego el sistema es compatible indeterminado con solución $x = z$, $y = -1/2 - z/2$, $z = z$.

Para el caso homogéneo el sistema es siempre compatible indeterminado con solución $x = z$, $y = -z/2$.

Caso (iv): $b = 0$. Partiendo desde el principio y escalonando la matriz se obtiene que $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A|B) = 3$ cualquiera que sea el valor de a, por lo que el sistema siempre será incompatible. En el caso homogéneo, esto no sucede y la solución viene dada por $x = z = 0$, $y = y$.

Para el último sistema se tiene que si $a \neq 4$ el sistema es incompatible y si $a = 4$ el sistema es compatible indeterminado con solución

$$x = \frac{14z - 5}{2}, \quad y = \frac{8z - 3}{2}, \quad z = z.$$

23. Hallar los valores y vectores propios de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcular los subespacios fundamentales correspondientes.

SOLUCIÓN: (A) El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 3),$$

con tres raíces reales distintas $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.

Al valor propio $\lambda = 0$ le corresponde el subespacio de vectores propios de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{0}$, es decir, $x = 0 = y + 2z$, de la forma $S(0) = \langle (0, 2, -1) \rangle$.

Al valor propio $\lambda = \sqrt{3}$ le corresponde el subespacio de vectores propios de ecuaciones $(A - \sqrt{3}I)\vec{x} = \vec{0}$, es decir, $x - \sqrt{3}y = 0 = y + (2 - \sqrt{3})z$, de la forma $S(\sqrt{3}) = \langle (3, \sqrt{3}, -(3 + 2\sqrt{3})) \rangle$.

Al valor propio $\lambda = -\sqrt{3}$ le corresponde el subespacio de vectores propios de ecuaciones $(A + \sqrt{3}I)\vec{x} = \vec{x}$, es decir, $x + \sqrt{3}y = 0 = y + (2 + \sqrt{3})z$, de la forma $S(-\sqrt{3}) = \langle (3, -\sqrt{3}, -3 + 2\sqrt{3})) \rangle$.

(B) En este caso el polinomio característico es $p(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$. Resulta $S(2) = \langle (1,1,1) \rangle$, $S(1) = \langle (1,-1,0) \rangle$ y $S(-1) = \langle (1,1,-2) \rangle$.

(C) Se tiene $p(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 5\lambda + 2)$, cuyas raíces son

$$-1, \qquad \frac{5-\sqrt{17}}{2}, \qquad \frac{5+\sqrt{17}}{2}.$$

Para el valor propio $\lambda = -1$ se tiene el subespacio fundamental de vectores propios con ecuaciones $x = 0 = y + z$, es decir, $S(-1) = \langle (0,1,-1) \rangle$.

Supongamos ahora $\lambda \neq -1$, es decir, $\lambda = (5 \pm \sqrt{17})/2$. Las ecuaciones $(C - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ dan el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} (3-\lambda)x - y - z = 0 \\ 2x + y - \lambda z = 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} (5-\lambda)x - (\lambda+1)z = 0 \\ y = -2x + \lambda z \end{array} \right. ,$$

de modo que podemos tomar $(x, z) = (1 + \lambda, 5 - \lambda)$ y entonces

$$y = -2(1+\lambda) + \lambda(5-\lambda) = -(\lambda^2 - 5\lambda + 2) - 2\lambda = -2\lambda,$$

ya que λ es raíz del polinomio cuadrático $\lambda^2 - 5\lambda + 2$. De este modo, los subespacios fundamentales son $S(\lambda) = \langle (1+\lambda, -2\lambda, 5-\lambda) \rangle$, con $\lambda = (5 \pm \sqrt{17})/2$.

(D) En este caso es $p(\lambda) = -(\lambda - 2)^3$. Para el único valor propio $\lambda = 2$ se tiene el subespacio fundamental de vectores propios con ecuaciones $y = z = 0$, es decir, $S(2) = \langle (1,0,0) \rangle$ con dimensión 1.

24. Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 24 \\ -4 & -8 & -24 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Probar que los vectores $(4,-4,1)$ y $(0,4,-1)$ son vectores propios de A. Hallar los valores propios asociados.

(b) Encontrar otro vector propio de A, de valor propio -4.

SOLUCIÓN: Para probar el apartado 1. planteamos que $(4,-4,1)$ es un vector propio, por lo tanto existe λ tal que

$$A \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De aquí se obtiene $\lambda = 2$. Del mismo modo, se obtiene que $(0,4,-1)$ es vector propio correspondiente al valor propio $\lambda = -2$.

Para resolver el apartado 2. planteamos la ecuación

$$A \cdot \vec{x} = -4\vec{x},$$

de donde obtenemos que los vectores propios, para $\lambda = -4$ son de la forma $(x, -x, 0)$, por lo que un vector propio es $(1, -1, 0)$.

25.

(a) Discutir, en función de los valores de a, y resuelve, en los casos en los que sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & a \\ x & + & 2y & - & az & = & a \\ ax & & & - & z & = & 3 \end{array}$$

(b) Sea A la matriz del sistema anterior. Calcular (para cualquier valor de a) su polinomio característico.

SOLUCIÓN: (a) Si $a = \pm\sqrt{3}$ el sistema es compatible indeterminado con soluciones

$$a = \sqrt{3} \longrightarrow x = \sqrt{3} + \frac{z}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{z}{\sqrt{3}}. \qquad a = -\sqrt{3} \longrightarrow x = -\sqrt{3} - \frac{z}{\sqrt{3}}, \quad y = -\frac{z}{\sqrt{3}}.$$

Si $a \neq \pm\sqrt{3}$ el sistema es compatible determinado y tiene solución única

$$x = 0, \quad y = -a, \quad z = -3.$$

(b) El polinomio característico de la matriz de coeficientes viene dado por

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + a^2 - 3.$$

26.

(a) Discutir, en función de los valores de a y b, y resolver, en los casos en los que sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & -1 \\ x & - & 2y & - & z & = & -2 \\ x & + & y & + & az & = & -b \end{array}$$

(b) Sea A la matriz del sistema anterior. Calcular (para cualquier valor de a) su polinomio característico.

SOLUCIÓN: (a) Para $a \neq 2$ se tiene $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B) = 3$ y el sistema es compatible determinado con siolución única dada por

$$x = \frac{b+1}{a-2}, \quad y = \frac{a+b-1}{a-2}, \quad z = \frac{b+1}{2-a}.$$

Si $a = 2$ y $b = -1$ se tiene $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado, con soluciones

$$x = -z, \quad y = 1 - z, \quad z = z.$$

Finalmente, si $a = 2$ y $b \neq -1$ se tiene $\operatorname{rg} A = 2$ y $\operatorname{rg}(A|B) = 3$ y el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

(b) El polinomio característico de la matriz de coeficientes viene dado por

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = -\lambda^3 + (a-1)\lambda^2 + a\lambda + 2 - a.$$

Para $a = 6$ el polinomio es $p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 6\lambda - 4$.

27. Sea A la matriz del sistema

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & a \\ & & y & - & z & = & 1 \\ ax & & & + & az & = & 2a+1 \end{array}$$

Resolver el sistema según los valores del parámetro a.

SOLUCIÓN: Si $a \neq 0$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B) = 3$ y el sistema es compatible determinado. La solución única viene dada por

$$x = \frac{1 + 2a + a^2}{2a}, \quad y = \frac{1 + 4a - a^2}{2a}, \quad z = \frac{1 + 2a - a^2}{2a}.$$

Si $a = 0$, $\operatorname{rg} A = 2$ y $\operatorname{rg}(A|B) = 3$, el sistema es incompatible y no tiene solución.

28. Discutir y resolver, según los valores del parámetro a, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + az = a, \\ x - y - z = 0, \\ y + z = a. \end{cases}$$

SOLUCIÓN: Si $a \neq 0$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B) = 3$ y el sistema es compatible determinado. La solución única viene dada por

$$x = a, \quad y = a + 2, \quad z = -2.$$

Si $a = 0$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado. La solución viene dada por

$$x = 0, \quad y = -z, \quad z = z.$$

29. Hallar los valores de a para que sea inversible la matriz A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Tomando a partir de ahora $a = 1$, calcula: (a) los valores propios de A; (b) una base de cada uno de los subespacios de vectores propios.

SOLUCIÓN: Calculamos el determinante de la matriz A y obtenemos

$$|A| = (a - 1)(a - 2)(a + 3).$$

La matriz tiene inversa si $|A| \neq 0$, es decir si $a \neq 1, 2, -3$.

Para $a = 1$, el polinomio característico viene dado por

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)(4 - \lambda).$$

Por tanto, los valores propios son $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ y $\lambda = 4$.

Para calcular los subespacios propios resolvemos las ecuaciones $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ para cada uno de los valores propios. Se obtiene

$$S(\lambda = -1) = \langle(2, 2, -3)\rangle, \quad S(\lambda = 0) = \langle(-3, 1, 1)\rangle, \quad S(\lambda = 4) = \langle(1, 1, 1)\rangle.$$

30. Encontrar, en función del parámetro a, las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ay + z = 0 \\ x + (a + 1)y + az = a + 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: Si $a \neq 0, 1$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B) = 3$ y el sistema es compatible determinado. La solución única viene dada por

$$x = \frac{a}{a - 1}, \quad y = \frac{1}{1 - a}, \quad z = \frac{a}{a - 1}.$$

Si $a = 0$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado. La solución viene dada por

$$x = 1 - y, \quad y = y, \quad z = 0.$$

Finalmente, si $a = 1$, $\operatorname{rg} A = 2$ y $\operatorname{rg}(A|B) = 3$ y el sistema es incompatible, por lo que no tiene solución.

31. Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & b \end{pmatrix}$. Hallar los valores propios y los subespacios de vectores propios asociados a dichos valores propios.

SOLUCIÓN: El polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - b)$, por lo que los valores propios son $\lambda = 1$ y $\lambda = b$. Los subespecies propios se determinan a partir de la ecuación $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ y resulta

$$S(\lambda = 0) = \langle(1 - b, 2)\rangle, \qquad S(\lambda = b) = \langle(0, 1)\rangle.$$

32. Discutir y resolver, según los valores del parámetro a, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+az=a \\ x+z=0 \\ y+z=a \end{cases}$$

Si $a \neq 2$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B) = 3$ y el sistema es compatible determinado. La solución única viene dada por

$$x=0, \quad y=a, \quad z=0.$$

Si $a=2$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado. La solución viene dada por

$$x=-z, \quad y=2-z, \quad z=z.$$