Matemáticas I
(Soluciones a los problemas del Tema 2)

1. Hallar el dominio de las siguientes funciones:

(i) $f_1(x) = \frac{x-1}{x^2-3x-4}$ (ii) $f_2(x) = \sqrt{f_1(x)}$

(iii) $f_3(x) = \frac{x+1}{4-x^2}$ (iv) $f_4(x) = \frac{x+1}{x^2+5x+7}$

(v) $f_5(x) = x^5 + 3x - 1$ (vi) $f_6(x) = \frac{3x+1}{x^3-5x^2+6x}$

(vii) $f_7(x) = \sqrt{16 - x^2}$ (viii) $f_8(x) = \frac{x-3}{\sqrt{3x+9}}$

(ix) $f_9(x) = \sqrt[4]{x^4 - 5x^2 + 4}$ (x) $f_{10}(x) = \frac{\sqrt{x^3-5x^2}}{x^2-7x}$

(xi) $f_{11}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+4}{9-x}}$ (xii) $f_{12}(x) = \ln(x^2 - 4x + 4)$

(xiii) $f_{13}(x) = \ln \frac{x-1}{x^2-3x-4}$ (xiv) $f_{14}(x) = \operatorname{arc\,sen} \frac{2x-1}{5}$

(xv) $f_{15}(x) = \ln(\frac{x}{x+2})$ (xvi) $f_{16}(x) = \operatorname{arc\,sen}(x-1)$

(xvii) $f_{17}(x) = \frac{x^2-3}{x-1}$ (xviii) $f_{18}(x) = \sqrt{x-1}$

(xix) $(f_{17} \circ f_{18})(x)$ (xx) $(f_{18} \circ f_{17})(x)$

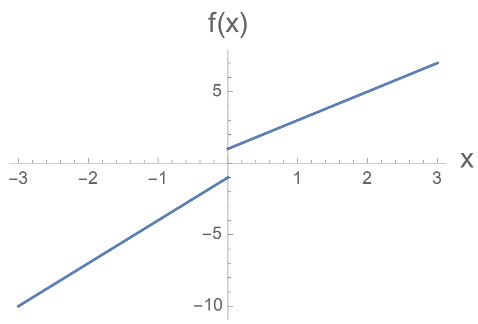
SOLUCIÓN:

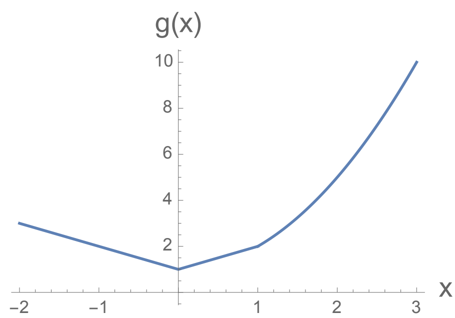
(i) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$	(ii) $(-1, 1] \cup (4, +\infty)$	(iii) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$	(iv) $\mathbb{R}$
(v) $\mathbb{R}$	(vi) $\mathbb{R} \setminus \{0, 2, 3\}$	(vii) $[-4, 4]$	(viii) $(-3, +\infty)$
(ix) $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$	(x) $[5, 7) \cup (7, +\infty)$	(xi) $\mathbb{R} \setminus \{9\}$	(xii) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
(xiii) $(-1, 1) \cup (4, +\infty)$	(xiv) $[-2, 3]$	(xv) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$	(xvi) $[0, 2]$
(xvii) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$	(xviii) $[1, +\infty)$	(xix) $[1, 2) \cup (2, +\infty)$	(xx) $[-1, 1) \cup [2, +\infty)$

2. Determina el dominio y el recorrido de las siguientes funciones. Haz un esbozo de su representación gráfica.

$$\text{(i) } f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(ii) } g(x) = \begin{cases} |x| + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 + x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

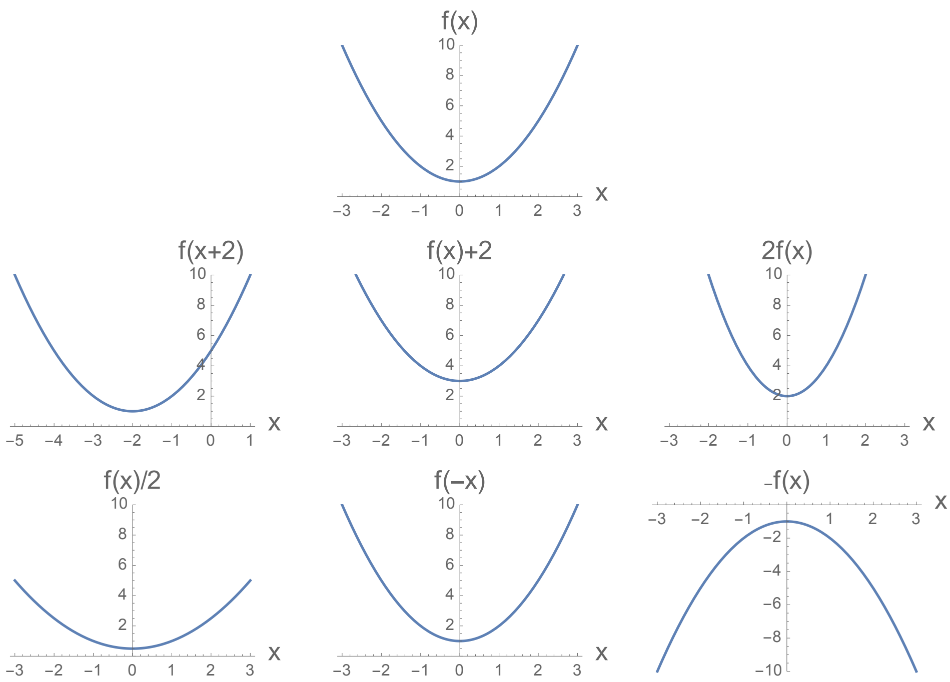
SOLUCIÓN: (i) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. (ii) $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} g = [1, +\infty)$.





3. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = 1 + x^2$ y, a partir de ella, obtén las de $f(x+2)$, $f(x) + 2$, $2f(x)$, $f(x)/2$, $f(-x)$ y $-f(x)$.

SOLUCIÓN:



4. Utilizando la regla de la cadena, calcula las funciones derivadas de:

a) $y = (x^2+1)^3$ b) $y = \left(\frac{x-1}{2-x}\right)^4$ c) $y = \sqrt{x^3-5x}$

d) $y = \ln(\operatorname{sen} x)$ e) $y = 4^{x^2+5x}$ f) $y = \cos(\ln x)$

g) $y = \operatorname{sen}^4(3x)$ h) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x^4 - x}$ i) $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{3}{x^2-1}\right)$

j) $y = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)$ k) $y = \ln\sqrt{\cos x}$ l) $y = \cos^3(4x)^2$

m) $y = \operatorname{arc\,tg}^2(x^2-1)$ n) $y = e^{\operatorname{sen} x}\cdot \operatorname{sen}^e x$ o) $y = \sqrt[3]{\dfrac{4x^2+9x}{2-x^2}}$

p) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-5}}$ q) $y = (\cos x - \operatorname{sen} x)^5$ r) $y = \operatorname{arc\,sen}\sqrt{1-x^2}$

s) $y = \left(\dfrac{\operatorname{sen} 3x + \cos 3x}{\operatorname{sen} 3x - \cos 3x}\right)^2$ t) $y = \dfrac{x+\cos\sqrt{x}}{x-\cos\sqrt{x}}$ u) $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

SOLUCIÓN:

(a) $6x\left(x^2+1\right)^2$ (b) $\dfrac{4(x-1)^3}{(2-x)^5}$ (c) $\dfrac{3x^2-5}{2\sqrt{x^3-5x}}$

(d) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ (e) $5\left(x^4+1\right)4^{x\left(x^4+5\right)}\ln 4$ (f) $-\dfrac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}$

(g) $4\operatorname{sen}^3 x\cos x$ (h) $\dfrac{4x^3\sec^2 x^4-1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x^4-x}}$ (i) $\dfrac{-6x}{\cos^2\left(\frac{3}{x^2-1}\right)\left(x^2-1\right)^2}$

(j) 1 (k) $\dfrac{-\operatorname{sen} x}{2\cos x}$ (l) $-96x\operatorname{sen}\left(16x^2\right)\cos^2\left(16x^2\right)$

(m) $-\dfrac{4x\operatorname{arc\,tg}\left(1-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2+1}$ (n) $e^{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen}^{e-1} x(\operatorname{sen} x+e)\cos x$ (o) $\dfrac{9x^2+16x+18}{3\sqrt[3]{(2-x^2)^4(4x^2+9x)^2}}$

(p) $\dfrac{-2x}{\sqrt[3]{(x^2-5)^4}}$ (q) $-5(\cos x - \operatorname{sen} x)^4(\operatorname{sen} x + \cos x)$ (r) $-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x^4}}$

(s) $\dfrac{12(\operatorname{sen} 3x + \cos 3x)}{(\cos 3x - \operatorname{sen} 3x)^3}$ (t) $-\dfrac{\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x}}{(x-\cos\sqrt{x})^2}$ (u) $\dfrac{\sqrt{x}\left(4\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\right)+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

5. ¡Deriva las funciones siguientes y simplifica las soluciones hasta llegar a las expresiones propuestas:

1. $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ Solución: $\frac{-2x}{1+x^4}$.
2. $f(x) = \ln\left[x+\sqrt{x^2+1}\right]$ Solución: $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
3. $f(x) = \operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x + 3x + 5$ Solución: $3\operatorname{tg}^4 x$.
4. $f(x) = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{3}\right)$ Solución: $\frac{\cos x}{9+\operatorname{sen}^2 x}$.
5. $f(x) = \ln\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ Solución: $\frac{1}{x(x^2+1)}$.
6. $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ Solución: $\frac{2}{e^x+e^{-x}}$.
7. $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ Solución: $\frac{2}{x^4-1}$.
8. $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}}$ Solución: $\frac{-1}{\cos x}$.
9. $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+2}{1-2x}\right)$ Solución: $\frac{1}{x^2+1}$.
10. $f(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)$ Solución: $\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x}}$.
11. $f(x) = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$ Solución: $\frac{1}{\cos^2 x}$.

6. ¡Realizando una derivación logarítmica, calcula las funciones derivadas de las siguientes: (i) $(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$, (ii) $(\frac{1}{x})^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$, (iii) $\sqrt[x]{\ln x}$, (iv) $(\operatorname{arc\,tg} x)^{\operatorname{sen} x}$, y (v) $(x^3-1)^{\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN:

(i) $\dfrac{2+\log x}{4\sqrt{x}}\sqrt{x}^{\sqrt{x}}$, (ii) $\dfrac{x\cos x\ln x - \operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen}^2 x}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$, (iii) $\dfrac{1-\ln x\ln(\ln x)}{x^2\ln x}\sqrt[x]{\ln x}$

(iv) $(\operatorname{arc\,tg} x)^{\operatorname{sen} x}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{(x^2+1)\operatorname{arc\,tg} x} + \cos x\log(\operatorname{arc\,tg} x)\right)$

(v) $\left(x^3-1\right)^{\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}}\left(\dfrac{\log\left(x^3-1\right)}{2\sqrt{x-x^2}} + \dfrac{3x^2\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}}{x^3-1}\right)$

7. ¡Halla las pendientes de las rectas tangentes a la curva $y = x - x^2$ en los puntos de abscisas $x = 0$, $x = 1/2$, $x = 1$.

SOLUCIÓN: La pendiente de la recta tangente es igual al valor de la derivada en dicho punto. Como $y'(x) = 1 - 2x$ resulta:

Pendiente en $x = 0$ igual a $y'(0) = 1$. Pendiente en $x = 1/2$ igual a $y'(1/2) = 0$. Pendiente en $x = 1$ igual a $y'(1) = -1$.

8. Sea $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$. Halla los puntos de la gráfica de f en los que la pendiente es: (a) 0; (b) -1; (c) 5.

SOLUCIÓN: Se trata de buscar aquellos puntos donde la derivada de la función es igual al valor que nos dan. Como

$$f'(x) = 2x^2 - x - 1,$$

se tiene:

(a) Puntos donde la pendiente es 0, aquellos para los que $f'(x) = 0$, de donde resulta

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, -1/2.$$

(b) La pendiente es -1 cuando $2x^2 - x - 1 = -1$ y, entonces $x = 0, 1/2$.

(c) La pendiente es 5 cuando $f'(x) = 5$, es decir cuando $2x^2 - x - 1 = 5$ y, entonces, $x = 2, -3/2$.

9. ¡¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta $5x + y = 3$?

SOLUCIÓN: La recta $5x + y = 3$ tiene pendiente -5 (coeficiente de x, cuando la variable y está dada de forma explícita o, como diríamos informalmente, *despejada*). Así, buscamos aquellos puntos para los que la derivada de $f(x)$ sea igual a -5. Como $f'(x) = 2x - 7$, sólo hay un punto que verifica $f'(x) = -5$ y es $x = 1$.

10. ¡Escribe las ecuaciones de la tangente y de la normal de las siguientes curvas en los puntos que se indican: (a) $y = \sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x = 4$, (b) $y = \operatorname{tg} 2x$ en el origen de coordenadas, y (c) $y = \arccos 3x$ en el punto de intersección con el eje OY.

SOLUCIÓN: La recta tangente a una función $f(x)$ en un punto de coordenada x_0 viene dada por la ecuación

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

mientras que la recta normal viene dada por la eecuación

$$y - f(x_0) = -1/f'(x_0)(x - x_0).$$

Teniendo esto en cuenta tenemos:

(a) Recta tangente: $y - 2 = 1/4(x - 4)$. Recta normal: $y - 2 = -4(x - 4)$.

(b) Recta tangente: $y = 2x$. Recta normal: $y = -x/2$.

(b) Recta tangente: $y - \pi/2 = -3x$. Recta normal: $y - \pi/2 = x/3$.

11. Halla la ecuación de la parábola $y = x^2 + ax + b$ que es tangente a la recta $y = x$ en $(1, 1)$.

SOLUCIÓN: Por ser tangente en el punto $(1, 1)$ sabemos que la parb́ola pasa por el punto $(1, 1)$, es decir:

$$1 = 1^2 + a \cdot 1 + b \longrightarrow a + b = 0.$$

Por otra parte, por la condición de tangencia, la pendiente de la recta tangente en el punto $(1, 1)$ es igual a la de la recta $y = x$, que es 1. Así, lo que tenemos es que $y'(x = 1) = 1$, lo que nos da la ecaución

$$a + 2 = 1.$$

Resolviendo las dos ecuaciones anteriores resulta $a = -1$ y $b = 1$, es decir la parábola buscada es $y = x^2 - x + 1$.

12. Encuentra las constantes a, b y c para que las gráficas de los dos polinomios $y = x^2 + ax + b$ e $y = x^3 - c$ se corten en el punto $(1, 2)$ y tengan la misma tangente en dicho punto.

SOLUCIÓN: Por cortarse en el punto $(1, 2)$, los dos polinomios pasan por dichos puntos, por lo que tenemos dos ecuaciones

$$2 = 1 + a + b, \quad 2 = 1 - c.$$

De la segunda ecuación resulta ser $c = -1$. Para resolver completamente el problema hacemos uso de la otra condición. En este caso lo que sabemos es que las derivadas de ambos polinomios coinciden en $x = 1$, por lo que $a + 2 = 3$. De aquí obtenemos $a = 1$ y, de la primera de las ecuaciones, $b = 0$.

13. Demuestra que la recta $y = -x$ es tangente a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Halla los puntos de tangencia. ¿Vuelve a cortar la curva esa tangente?

SOLUCIÓN: El problema se puede resolver de diferentes formas. Veamos una de ellas. Al ser la recta $y = -x$ tangente a la curva, quiere decir que, al menos, tienen un punto en común. Los puntos comunes de la recta y la curva se obtienen igualando sus coordenadas y, esto es

$$-x = x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 0, 3.$$

Es decir, la recta y la curva coinciden en los puntos de coordenadas $(0, 0)$ y $(3, -3)$. Calculamos ahora la pendiente de la recta tangente a la curva en ambos puntos, a través de la derivada y se tiene que

$$y'(0) = 8, \quad y'(3) = -1.$$

Por tanto, la recta es tangente a la curva en el punto $(3, -3)$ y vuelve a cortar a la curva en el punto $(0, 0)$.

14. Se deja caer una piedra en un estanque en calma, lo que provoca ondas circulares: el radio r del círculo exterior crece a un ritmo constante de $1\,\mathrm{m/min}$. Cuando el radio es $4m$, ¿a qué ritmo ha cambiado el área total A de la región circular cubierta por las ondas?

SOLUCIÓN: Tenemos que el área de la región circular viene dada por

$$A = \pi r^2,$$

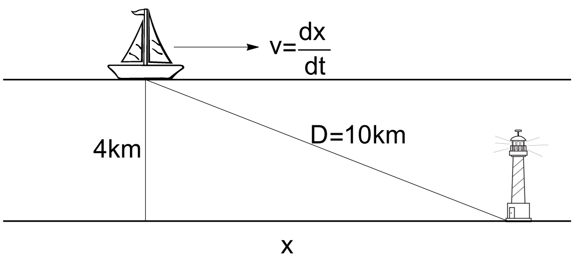
donde r es el radio del círculo exterior. Aplicando la regla de la cadena resulta

$$\frac{dA}{dt} = \pi 2r \, \frac{dr}{dt}.$$

Para $r = 4$, tenemos que $dr/dt = 1\,\mathrm{m/min}$, por lo que, sustituyendo en la fórmula para la variación del área, se obtiene $dA/dt = 8\pi\,\mathrm{m^2/min}$.

15. Un barco navega paralelamente a una costa recta, a una distancia de $4\,\mathrm{km}$. La distancia entre el barco y un faro situado en la costa disminuye a razón de $50\,\mathrm{m}$ por minuto cuando esa distancia es de $10\,\mathrm{km}$. Calcula la velocidad del barco en kilómetros por hora.

SOLUCIÓN: Veamos un esquema del problema en la siguiente figura:



Lo que sabemos es que cuando $D = 10\,\mathrm{km}$ entonces $dD/dt = 50\,\mathrm{m/min}$, y lo que queremos calcular es la velocidad del barco $v = dx/dt$. Por el teorema de Pitágoras, la relación entre D y x viene dada por $x^2 = D^2 - 4^2$, o sea, $x^2 = D^2 - 16$. Aplicando la regla de la cadena resulta

$$2x\frac{dx}{dt} = 2D\frac{dD}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{D}{x}\frac{dD}{dt}.$$

Cuando $D = 10$, se tiene $x = \sqrt{84}$ y, pasando la velocidad del barco respecto al faro a kilómetros por hora

$$\frac{dD}{dt} = 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}\,\frac{60\,\mathrm{min}}{1\,\mathrm{h}}\,\frac{1\,\mathrm{km}}{1000\,\mathrm{m}} = 3\,\mathrm{km/h},$$

resulta $dx/dt = 30/\sqrt{84}\,\mathrm{km/h} \approx 3.27327\,\mathrm{km/h}$.

16. Un depósito cónico tiene un agujero en su vértice (situado en la base) por el que se sale el agua que almacena. Se sabe que la altura del agua está cambiando a razón de $-0.2\,\mathrm{m/min}$ y el radio de la superficie del agua a razón de $-0.1\,\mathrm{m/min}$. ¿Cuál es el ritmo de cambio del volumen de agua V cuando el radio es $r = 1$ metro y la altura $h = 2$ metros? Nota: $V = \pi r^2 h/3$.

SOLUCIÓN: Derivamos la expresión para el volumen de agua, aplicando la regla de la cadena y la regla de la derivada del producto. Así tenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2\pi rh}{3}\frac{dr}{dt} + \frac{\pi r}{3}\frac{dh}{dt}.$$

Ahora, basta sustituir los valores de r, h y dr/dt y dh/dt, por lo que $dV/dt = -0.2\pi\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$.

17. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de las funciones

(i) $y = 2x^2 + 5x - 7$

(ii) $y = 4x^3 - 4x^2 + x - 10$

(iii) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 12x + 7$

(iv) $y = \frac{x^3}{e^{2x}}$

(v) $y = (x-2)^2(9x-28)(x-4)$

(vi) $y = (3x-1)(x+1)^2(x-2)^2$

(vii) $y = (x^2 - 11x + 31)e^x$

viii) $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{1+x^2}$

(ix) $y = e^{x^3-6x+2}$

(x) $y = e^{2x} + 4e^{-2x}$

(xi) $y = (x^2-1)^{-1}$

(xii) $y = x^3 - \ln x + 2$

(xiii) $y = (x^2-4)^{2/3}$

(xiv) $y = \frac{10}{x}\ln\frac{x}{10}$

(xv) $y = \sqrt[3]{x-1}$

(xvi) $y = x^x$

SOLUCIÓN:
(i) Creciente en $(-5/4, +\infty)$. Decreciente en $(-\infty, -5/4)$.

(ii) Creciente en $(-\infty, 1/6) \cup (1/2, +\infty)$. Decreciente en $(1/6, 1/2)$.

(iii) Creciente en $(2, +\infty)$. Decreciente en $(-\infty, 2)$.

(iv) Creciente en $(-\infty, 3/2)$. Decreciente en $(3/2, +\infty)$.

(v) Creciente en $(2, 8/3) \cup (11/3, +\infty)$. Decreciente en $(-\infty, 2) \cup (8/3, 11/3)$.

(vi) Creciente en $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{13-\sqrt{409}}{30}, \frac{13+\sqrt{409}}{30}\right) \cup (2, +\infty)$. Decreciente en $\left(-1, \frac{13-\sqrt{409}}{30}\right) \cup \left(\frac{13+\sqrt{409}}{30}, 2\right)$.

(vii) Creciente en $(-\infty, 4) \cup (5, +\infty)$. Decreciente en $(4, 5)$.

(viii) Creciente en $(-1, 1)$. Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

(ix) Creciente en $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$. Decreciente en $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

(x) Creciente en $\left(\ln\sqrt{2}, +\infty\right)$. Decreciente en $\left(-\infty, \ln\sqrt{2}\right)$.

(xi) Creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$. Decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

(xii) Creciente en $\left(1/\sqrt[3]{3}, +\infty\right)$. Decreciente en $\left(0, 1/\sqrt[3]{3}\right)$.

(xiii) Creciente en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$. Decreciente en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

(xiv) Creciente en $(0, 10\,e)$. Decreciente en $(10\,e, +\infty)$.

(xv) Creciente para todo $x \in \mathbb{R}$.

(xvi) Creciente en $(1/e, +\infty)$. Decreciente en $(0, 1/e)$.

18. Halla los valores máximo y mínimo absoluto de las funciones en los intervalos que se indican:

(a) $y = x^4 - 2x^2 + 5$; $[-2, 2]$

(b) $y = \sqrt{100 - x^2}$; $[-6, 8]$

(c) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$; $[0, 1]$

(d) $y = \operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}$; $[0, 1]$

SOLUCIÓN: (a) Máximo absoluto en $x = -2$ y $x = 2$, con $y(-2) = y(2) = 13$. Mínimo absoluto en $x = -1$ y $x = 1$, con $y(-1) = y(1) = 4$.

(b) Máximo absoluto en $x = 0$, con $y(0) = 10$. Mínimo absoluto en $x = 8$ con $y(8) = 6$.

(c) Máximo absoluto en $x = 0$ y $x = 1$, con $y(0) = y(1) = 1$. Mínimo absoluto en $x = 1/2$, con $y(1/2) = 3/5$.

(d) La función $\operatorname{arc\,tg}$ es siempre creciente, por lo que el problema se reduce a saber los valores máximo y mínimo de la función racional $(1-x)/(1+x)$. A su vez esta función es siempre decreciente, por lo que los valores máximo y mínimo se alcanzarán en los extremos del intervalo. Así, el valor máximo se alcanza en $x = 0$ con $y(0) = \pi/4$ y el valor mínimo en $x = 1$, con $y(1) = 0$.

19. Halla los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

(a) $y = 2x^3 - 3x^2$

(b) $y = \frac{6}{x^2+3}$

(c) $y = x^4 + x^3 - 3x^2 + 1$

(d) $y = x\sqrt{x+3}$

(e) $y = \frac{x}{x^2-4}$

(f) $y = \frac{x-2}{x^2-4x+3}$

SOLUCIÓN:
(a) Cóncava en $(-\infty, 1/2)$. Convexa en $(1/2, +\infty)$.

(b) Cóncava en $(-1, 1)$. Convexa en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

(c) Cóncava en $(-1, 1/2)$. Convexa en $(-\infty, -1) \cup (1/2, +\infty)$.

(d) Convexa en $[3, +\infty)$.

(e) Cóncava en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$. Convexa en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.

(f) Cóncava en $(-\infty, 1) \cup (2, 3)$. Convexa en $(1, 2) \cup (3, +\infty)$.

20. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones:

(i) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$

(ii) $y = \frac{x^2-3x+2}{(x+1)^2}$

(iii) $y = \frac{x^2+x+1}{x^2+5x+4}$

(iv) $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-1}$

(v) $y = |x^3 - 3x^2|$

(vi) $y = x \operatorname{arc\,tg} x$

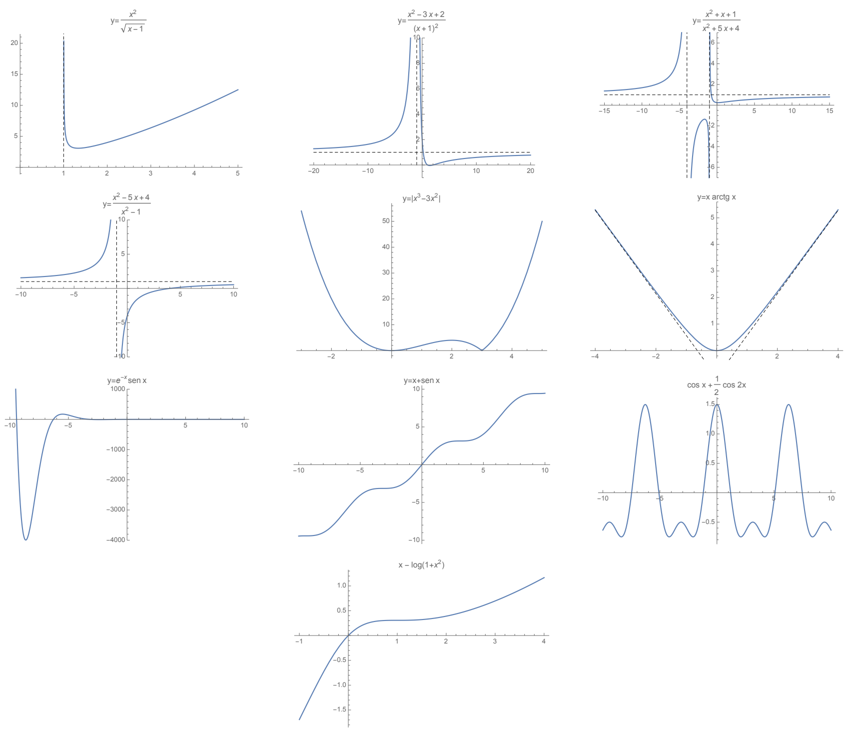
(vii) $y = e^{-x} \operatorname{sen} x$

(viii) $y = y = x + \operatorname{sen} x$

(ix) $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$

(x) $y = x - \ln(1 + x^2)$

SOLUCIÓN:



21. Descomponer el número 8 en dos sumandos tales que la suma de sus cubos sea lo menor posible.

SOLUCIÓN: Sean x, y las dos partes en las que se descompone el número 8. Entonces,

$$x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x.$$

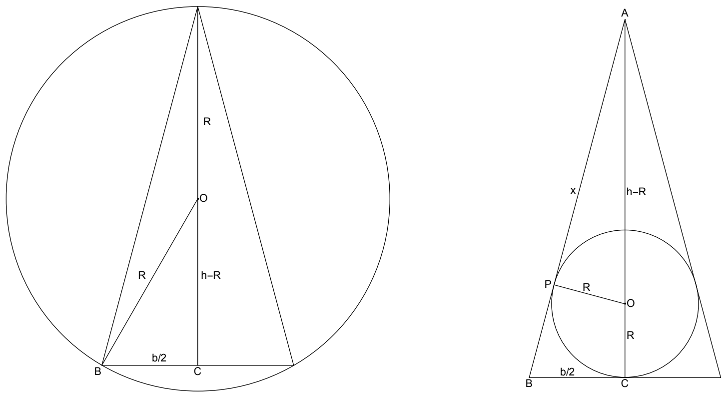
La suma de los cubos de x, y será igual a

$$x^3 + y^3 = x^3 + (8 - x)^3 = 24x^2 - 192x + 512.$$

Derivamos esta expresión y obtenemos que hay un mínimo relativo para $x = 4$ y, por lo tanto, será también mínimo absoluto. Así pues, la descomposición que minimiza la suma de los cubos es cuando $x = y = 4$.

22. En una circunferencia de radio R, inscribir un triángulo isósceles de área máxima y circunscribir uno de área mínima.

SOLUCIÓN: Dibujemos las dos situaciones que se nos plantean con los elementos principales.



Para el caso en el que tenemos que inscribir un triángulo isósceles (parte izquierda de la figura), del triángulo rectángulo OBC encontramos una relación entre la base y la altura del triángulo isósceles que deseamos inscribir. Esta relación es

$$R^2 = (h - R)^2 + \frac{b^2}{4} \Rightarrow b = 2\sqrt{2hR - h^2}.$$

De esta forma podemos expresar el área del triángulo en función de h, teniendo

$$A(h) = \frac{1}{2}bh = h\sqrt{2hR - h^2}.$$

Calculando los extremos relativos, vemos que $A(h)$ tiene un máximo relativo, y absoluto, cuando $h = 3R/2$. Entonces $b = \sqrt{3}R$, y se trata de un triángulo equilátero.

Veamos ahora el segundo caso, que es un poco más complicado. Si nos fijamos en los triángulos OAP y ABC nos damos cuenta de que son semejantes, ya que tienen los tres ángulos iguales, pues OAP es rectángulo, al ser el radio de la circunferencia perpendicular al lado AB, y tener en común el ángulo en el vértice A. Aplicando la relación de semejanza entre sus lados, encontramos, de nuevo, una relación entre la base y la altura del triángulo circunscrito

$$\frac{h}{x} = \frac{b/2}{R} \longrightarrow \frac{h}{\sqrt{(h-R)^2 - R^2}} = \frac{b/2}{R} \Rightarrow b = \frac{2hR}{\sqrt{h^2 - 2hR}}.$$

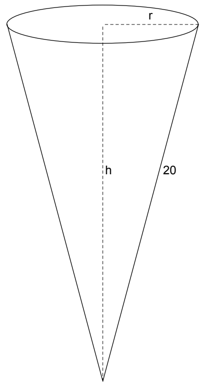
Así, el área, en función de h queda

$$A(h) = \frac{1}{2}bh = \frac{Rh^2}{\sqrt{h^2 - 2hR}}.$$

Calculando los extremos relativos, vemos que $A(h)$ tiene un mínimo relativo, y absoluto, cuando $h = 3R$. Entonces $b = 2R\sqrt{3}$, y se trata, de nuevo, de un triángulo equilátero.

23. Se debe hacer un embudo cónico que tenga la generatriz igual a 20 cm. ¿Cuál debe ser la altura del embudo para que su volumen sea el mayor posible?

SOLUCIÓN: Según se ve en la siguiente figura, se puede establecer una relación entre el radio y la altura del embudo cónico, sin más que aplicar el teorema de Pitágoras.



Esta relación viene dada por $r^2 = 400 - h^2$. Así, el volumen del cono, en función de la altura, queda como

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \longrightarrow V(h) = \frac{1}{3}\pi(400 - h^2)h.$$

Esta función alcanza un máximo relativo, y absoluto (cuando $h > 0$), para $h = 20/\sqrt{3}$ cm.

24. La concentración de oxígeno en un estanque contaminado con un residuo orgánico viene dada por la ecuación

$$c(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}, \qquad 0 \leq t < \infty,$$

donde t representa el tiempo en semanas. Halla los instantes en los que se alcanza la concentración máxima y mínima de oxígeno.

SOLUCIÓN: La concentración máxima se alcanza para $t = 0$ (extremo absoluto, pero no relativo), con $c(0) = 1$, y la mínima para $t = 1$, (extremo absoluto y relativo), con $c(1) = 1/2$. Nótese que, para $t \to \infty$, la concentración se acerca asintóticamente al máximo.

25. Consideramos un cilindro circular hueco y cerrado por una de sus bases. Sabiendo que su superficie es $12\pi\ m^2$, calcular su radio R y su altura H para que el volumen sea máximo. Hallar dicho volumen, comprobando que es máximo.

SOLUCIÓN: La superficie del cilindro hueco será igual a la suma del área lateral, $2\pi RH$, más el área de una de las bases, πR^2. Por lo tanto tenemos la relación

$$2\pi RH + \pi R^2 = 12\pi \Rightarrow H = \frac{12 - R^2}{2R}.$$

Ahora, podemos expresar el volumen del cilindro en función del radio

$$V = \pi R^2 H \longrightarrow V(R) = \frac{\pi}{2}(12 - R^2)R.$$

Derivando la expresión anterior, e igualado a cero, se obtiene un extremo relativo para $R = 2$. Como $V'(R) > 0$ para $R < 2$ y $V'(R) < 0$ para $R > 2$, se trata de un máximo relativo, pero también absoluto (para $R > 0$). Así, las dimensiones del cilindro máximo vienen dadas por $R = 2$ cm y $H = 2$ cm, siendo el volumen 8π cm^3.

26. Una página de un libro debe tener 1.5 cm de margen en las partes superior e inferior y 1 cm de margen en los laterales. Si se desea tener 24 cm^2 de superficie impresa, se pide:
(a) Calcular las dimensiones de la página para minimizar su superficie total.
(b) Si disponemos de una partida de láminas de 45×30 cm^2 y el precio de cada lámina es de 1.5 euros, calcular el coste de un libro de 1 000 hojas.

SOLUCIÓN: (a) Dimensiones: 9×6, siendo 9 la altura y 6 la anchura. (b) Coste: 300 euros.

27. Se quiere construir una nave industrial en forma de prisma rectangular, con las siguientes características: la longitud de la nave ha de ser 3 veces su anchura y su capacidad $625\,\mathrm{m}^3 = 5^4\,\mathrm{m}^3$. El coste de la edificación es de 2 000 euros. Además, se recubre el suelo con un terrazo que cuesta $7\,\mathrm{euros}/m^2$. Las paredes se cubren hasta la mitad de altura con un azulejo que cuesta $6\,\mathrm{euros/m}^2$, y el resto (techo incluido) se pinta. La pintura vale $3\,\mathrm{euros/m}^2$. Hallar las dimensiones de la nave para que el gasto sea mínimo.

SOLUCIÓN: El gasto viene dado por la función $c = 2000 + 30a^2 + 36ah$, donde a es la anchura de la nave y h su altura. El gasto es mínimo para $a = 5\,\mathrm{m}$ y $h = 25/3\,\mathrm{m}$, siendo la longitud de la nave $15\,\mathrm{m}$ y el coste 4250 euros.

28. Entre los rectángulos de área S, determinar aquél cuyo perímetro sea mínimo.

SOLUCIÓN: El rectángulo de perímetro mínimo para un área dada S es el cuadrado de lado $\sqrt{S}$.

29. Un alambre de $100\,\mathrm{m}$ se corta en dos partes, con una de ellas se forma una circunferencia y con la otra un cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas sea mínima?

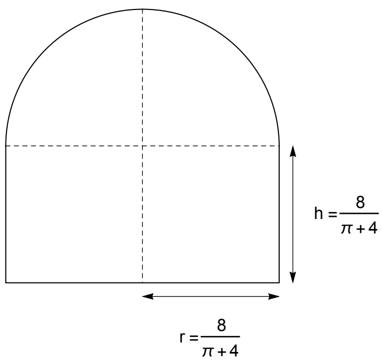
SOLUCIÓN: Para la circunferencia se emplearán $100\pi/(4+\pi) \approx 44$ metros de alambre y el resto, hasta 100 metros, para el cuadrado.

30. Hay que hacer una superficie rectangular cercada por tres de sus lados con tela metálica y lindante por el cuarto con una larga pared de piedra. ¿Qué forma será más conveniente dar a la superficie para que su área sea mayor si se dispone en total de L metros de tela metálica?

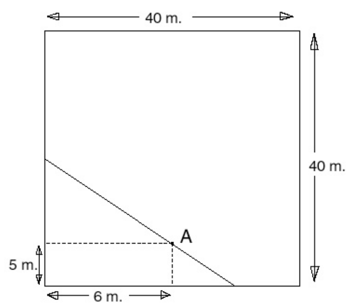
SOLUCIÓN: Las dimensiones deberán ser 25×50, coincidiendo uno de los lados de 50 metros con la pared de piedra.

31. Una ventana tiene forma de rectángulo y está coronada por un semicírculo. Sabiendo que el perímetro debe ser de $8\,\mathrm{m}$, hallar las dimensiones de la ventana que permita la mayor entrada de luz.

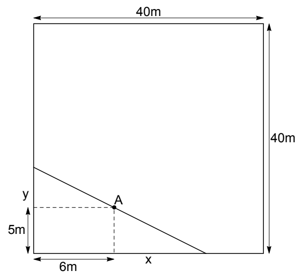
SOLUCIÓN: Las dimensiones aparecen en el siguiente dibujo:



32. Un granjero tiene un establo de 40×40 metros cuadrados, y en el punto A del establo tiene una tubería vertical. El granjero quiere poner uno tablón apoyado en A y en las dos paredes próximas de forma que quede un corral triangular para las gallinas. ¿Qué deberá hacer para que le quede el resto del establo lo más grande posible? ¿Y para que le quede lo más pequeño posible?



SOLUCIÓN: Llamemos x e y a los segmentos que aparecen en la siguiente figura:



El área del corral triangular será $A = 30 + 3y + 5x/2$. Aplicando semejanza de triángulos resulta

$$A(y) = 30 + 3y + \frac{75}{y}.$$

La función anterior tiene un mínimo relativo cuando $y = 5$. Por otra parte y puede variar entre $30/34$, cuando $x = 34$, y 35. De este modo, el área del corral es máxima cuando $y = 35$ y es mínima cuando $y = 5$.

33. Verificar que el polinomio $p(x) = 7x^3 - 5x^2 + 2x + 3$ coincide con su polinomio de Maclaurin de grado 3. ¿Es cierto que cada polinomio de grado n coincide con su polinomio de Maclaurin de orden n?

SOLUCIÓN: Calculamos las sucesivas derivadas de $p(x)$ hasta orden 3 y obtenemos

$$\begin{array}{ll} p(x) = 7x^3 - 5x^2 + 2x + 3, & p(0) = 3, \\ p'(x) = 21x^2 - 10x + 2, & p'(0) = 2, \\ p''(x) = 42x - 10, & p''(0) = -10, \\ p'''(x) = 42, & p'''(0) = 42, \end{array}$$

El polinomio de Maclaurin de orden 3 es igual a

$$p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3.$$

Sustituyendo ahora los valores de las derivadas en $x = 0$ obtenemos $p(x)$.

Este resultado es general y todo polinomio de grado n coincide con su polinomio de Maclaurin de orden n

34. Sea el polinomio $p(x) = 2 + 3x - x^2 + x^3$. Calcular su desarrollo en potencias de $x - 1$ mediante el método de Ruffini y con el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 1.

SOLUCIÓN: Para aplicar el método de Ruffini debemos calcular los sucesivos restos de dividir el polinomio $p(x)$ por $x - 1$. Se puede hacer de manera algorítmica, como se ve a continuación

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & & 1 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & \boxed{5} \\ 1 & & 1 & 1 & \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{4} & \\ 1 & & 1 & & \\ \hline & 1 & \boxed{2} & & \\ 1 & & & & \\ \hline & \boxed{1} & & & \end{array}$$

Así, el desarrollo en potencias de $x - 1$ resulta ser

$$p(x) = (x - 1)^3 + 2(x - 1)^2 + 4(x - 1) + 5,$$

donde los coeficientes de las potencias de $x-1$ son los sucesivos restos de dividir por $x-1$.

Si usamos el polinomio de Taylor, debemos calcular las sucesivas derivadas de $p(x)$ en $x=1$. Haciéndolo resulta $p(1)=2$, $p'(1)=5$, $p''(1)=4$, $p'''(1)=6$. Usando la expresión del polinomio de Taylor

$$p(x)=p(1)+p'(1)(x-1)+\frac{p''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{p'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

y sustituyendo los valores de las derivadas, se obtiene el mismo resultado.

35. Repite el ejercicio anterior, ahora con grado 4, con el polinomio $p(x)=x^4-11x^3+43x^2+60x+13$ y el valor $x=3$.

SOLUCIÓN: $p(x)=(x-3)^4+(x-3)^3-2(x-3)^2+129(x-3)+364$.

36. Escribe el polinomio de Maclaurin de grado 4 de las funciones: (a) $f(x)=e^{x^2}$, (b) $f(x)=e^{(e^x)}$, (c) $f(x)=(1+e^x)^2$, (d) $f(x)=xe^x$, (e) $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}$. ¿Podrías, en algunos o en todos los casos, dar el término general de grado n?

SOLUCIÓN: (a) $1+x^2+\dfrac{x^4}{2}$. Término general: $\dfrac{x^{2n}}{n!}$.

(b) $e+ex+ex^2+\dfrac{5e}{6}x^3+\dfrac{5e}{8}x^4$.

(c) $4+4x+3x^2+\dfrac{5}{3}x^3+\dfrac{3}{4}x^4$. Término general: $\dfrac{2+2^n}{n!}x^n$ $(n\geq 1)$.

(d) $x+x^2+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^4}{6}$. Término general: $\dfrac{x^n}{(n-1)!}$ $(n\geq 1)$.

(e) $1+x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{8}$.

37. Repite el ejercicio anterior con las funciones: (a) $f(x)=\log((1-x)^{-1/2})$, (b) $f(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$, (c) $f(x)=(1-x)\log(1+x)$.

SOLUCIÓN: (a) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{8}$. Término general: $\dfrac{x^n}{2n}$ $(n\geq 1)$.

(b) $2x+\dfrac{2x^3}{3}$. Término general: $\dfrac{2x^n}{n}$ si n es impar y 0 en otro caso.

(c) $x-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{5}{6}x^3-\dfrac{7}{12}x^4$. Término general: $(-1)^{n+1}\dfrac{2n-1}{n^2-n}x^n$ $(n\geq 2)$.

38. Calcular el polinomio de Taylor de grado n de las siguientes funciones en el punto x_0 que se indica:

(a) $f(x)=\dfrac{1}{a-bx}$, $x_0=1$ (b) $f(x)=\operatorname{sen}^2(2x)$, $x_0=0$ (c) $f(x)=\operatorname{sen}\dfrac{3x}{2}$, $x_0=\pi$

(d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-a^2}$, $x_0=-1$ (e) $f(x)=\sqrt{1+x}$, $x_0=3$ (f) $f(x)=\log 2x-\dfrac{1}{x-1}$, $x_0=2$

SOLUCIÓN: (a) $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{b}{(a-b)^2}(x-1)+\dfrac{b^2}{(a-b)^3}(x-1)^2+\cdots+\dfrac{b^n}{(a-b)^{n+1}}(x-1)^n+\cdots$.

(b) $4x^2-\dfrac{16}{3}x^4+\dfrac{128}{45}x^6+\cdots(-1)^{n+1}\dfrac{2^{4n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$.

(c) $-1+\dfrac{9}{8}(x-\pi)^2-\dfrac{27}{128}(x-\pi)^4+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{3^{2n}}{2^{2n}(2n)!}(x-\pi)^{2n}+\cdots$.

(d) $\dfrac{1}{1-a^2}+\dfrac{2}{(1-a^2)^2}(x+1)+\dfrac{3+a^2}{(1-a^2)^3}(x+1)^2+\cdots+\dfrac{(1+a)^{n+1}-(1-a)^{n+1}}{2a(1-a^2)^{n+1}}(x+1)^n+\cdots$.

(e) $2+\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{(x-3)^2}{64}+\dfrac{(x-3)^3}{512}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-2)!}{2^{4n-2}n!(n-1)!}(x-3)^n+\cdots$.

(f) $-1+\log 4+\dfrac{3}{2}(x-2)-\dfrac{9}{8}(x-2)^2+\dfrac{25}{24}(x-2)^3+\cdots+(-1)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n\,2^n}\right)(x-2)^n+\cdots$.