# Matemáticas I

(Soluciones a los problemas del Tema 3)

**1.** Determinar y representar gráficamente el dominio, $D \subset \mathbb{R}^2$, de las siguientes funciones

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{y}\cos x^2$

(b) $f(x,y) = \operatorname{tg}\dfrac{x^2}{y}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

(d) $f(x,y) = \operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{2} + \sqrt{xy}$

(e) $f(x,y) = \sqrt{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$

(f) $f(x,y) = \ln(2x-y+1)$

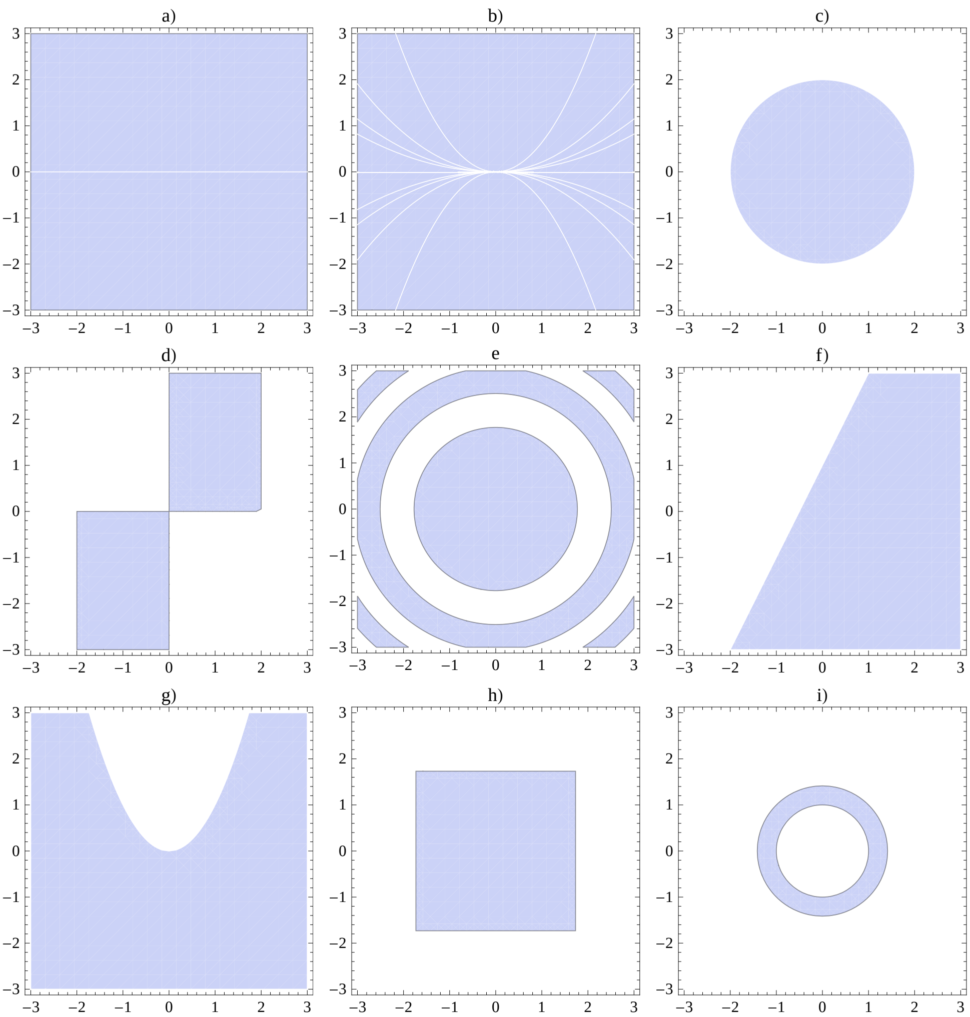
(g) $f(x,y) = \ln(x^2-y)$

(h) $f(x,y) = \sqrt{3-x^2} + \sqrt{3-y^2}$

(i) $f(x,y) = \sqrt{2-x^2-y^2} + \sqrt{x^2+y^2-1}$

SOLUCIÓN:

(a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$, ya que lo único que impide que $f(x,y)$ pueda calcularse es cuando hay una diviión por cero, lo que sucede si $y = 0$. Por tanto el o minio es todo el plano menos la recta $y = 0$, es decir, todo el plano menos el eje $x$. La representación gráfica, junto con la del resto de funciones del problema está en la siguiente figura.




(b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0 \text{ y } \frac{x^2}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, que resulta ser todo el plano menos el eje $x$ y una colección infinita de parábolas.

(c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4-x^2-y^2 > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4\}$, que son dos rectángulos infinitos, simétricos respecto al origen de coordenadas, el primero de base $[0,2]$ y altura infinita y positiva y el segundo de base $[-2,0]$ y altura infinita y negativa.

(d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \text{ y } xy \geq 0\}$, que es el interior de un círculo de radio 2.

(e) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{sen}(x^2+y^2) \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2k\pi \leq x^2+y^2 \leq (2k+1)\pi, k = 0,1,\ldots\}$, que es una colección infinita de coronas circulares.

(f) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y + 1 > 0\}$, que es un semiplano, donde la recta que hace de frontera no está en el dominio.

(g) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y > 0\}$, que es el exterior de la parábola $y = x^2$.

(h) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 - x^2 \geq 0 \text{ y } 3 - y^2 \geq 0\} = D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{3} \leq x, y \leq \sqrt{3}\}$, que es un cuadrado centrado en el origen, de lados paralelos a los ejes coordenados y de longitud $2\sqrt{3}$.

(i) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 - x^2 - y^2 \geq 0 \text{ y } x^2 + y^2 - 1 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$, que es una corona circular de radios 1 y $\sqrt{2}$.

**2.** Hallar las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

(e) $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y^2}{x}$

(b) $f(x,y) = x^y$

(f) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$

(c) $f(x,y,z) = (xy)^z$

(d) $f(x,y,z) = z^{xy}$

(g) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(x^2y) + \operatorname{arc\,tg}(xy^2)$

(h) $f(x,y) = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2} + x}$

SOLUCIÓN:

(a) $f_x = 3x^2 - 3y,\ f_y = 3y^2 - 3x$.

(b) $f_x = yx^{y-1},\ f_y = x^y \ln x$.

(c) $f_x = yz(xy)^{z-1},\ f_y = xz(xy)^{z-1},\ f_z = (xy)^z \ln(xy)$.

(d) $f_x = yz^{xy} \ln z,\ f_y = xz^{xy} \ln z,\ f_z = xyz^{xy-1}$.

(e) $f_x = \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{y^2}{x^2},\ f_y = -\dfrac{2x}{y^3} + \dfrac{2y}{x}$.

(f) $f_x = \dfrac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}},\ f_y = -\dfrac{y}{\sqrt{x^4-y^4}}$.

(g) $f_x = \dfrac{2xy}{x^4y^2+1} - \dfrac{y^2}{x^2y^4+1},\ f_y = \dfrac{x^2}{x^4y^2+1} - \dfrac{2xy}{x^2y^4+1}$.

(h) $f_x = -\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f_y = \dfrac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.

**3.** Calcula las derivadas que se piden:

(a) $f(x,y) = \sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$. Hallar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1)$.

(b) $g(x,y,z) = \log(xy+z)$. Hallar $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,2,0),\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,2,0),\ \dfrac{\partial g}{\partial z}(1,2,0)$.

SOLUCIÓN:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 0$.

(b) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,2,0) = 1,\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,2,0) = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\partial g}{\partial z}(1,2,0) = \dfrac{1}{2}$.

**4.** Hallar las segundas derivadas parciales de la función $z$:

(a) $z = x\cos y - y\cos x$  (b) $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$  (c) $z = \cos 5x \cdot \operatorname{sen} 3y$

SOLUCIÓN:

(a) $z_{xx} = y\cos x$, $z_{xy} = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y$, $z_{yy} = -x\cos y$.

(b) $z_{xx} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $z_{xy} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z_{yy} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

**5.** Probar que:

(a) Si $f(x,y) = \log(x^2+xy+y^2)$, entonces $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2$.

(b) Si $f(x,y,z) = (x-y)(y-z)(z-x)$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$.

(c) Si $f(x,y) = \log[(x-a)^2+(y-b)^2]$, entonces $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

SOLUCIÓN:

(a) Calculando las derivadas parciales se tiene

$$f_x = \frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}, \quad f_y = \frac{2y+x}{x^2+xy+y^2},$$

de donde se sigue que $xf_x + yf_y = 2$.

(b) Derivando como un producto

$$\begin{aligned} f_x &= (y-z)(z-x) - (x-y)(y-z), \\ f_y &= -(y-z)(z-x) + (x-y)(z-x), \\ f_z &= -(x-y)(z-x) + (x-y)(y-z), \end{aligned}$$

de donde se sigue fácilmente que $f_x + f_y + f_z = 0$.

(c) Calculando las derivadas de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \frac{2}{(x-a)^2+(y-b)^2} - \frac{4(x-a)^2}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \frac{2}{(x-a)^2+(y-b)^2} - \frac{4(y-b)^2}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2},$$

por lo que, tras un sencillo cálculo, se tiene que $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

Como complemento a este problema, veamos una forma de resolver el apartado $b$) sin necesidad de calcular derivadas parciales. Basta observar que si $x = y = z = t$, entonces $f(x,y,z) = 0$. Podemos ver esto como la composición de dos funciones, la primera función es

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow R, \quad f(x,y,z) = (x-y)(y-z)(z-x),$$

mientras que la segunda función es

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(t) = (t,t,t),$$

de manera que $f \circ g = 0$. Por tanto $(f \circ g)' = 0$, pero, por la regla de la cadena,

$$f'(g)g' = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

**6.** Determinar las derivadas parciales que se indican:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ con $f(x,y) = \log \operatorname{sen} \dfrac{x}{\sqrt{y}}$; $x = 3t^2$; $y = \sqrt{t^2+1}$.

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ con $f(x,y) = e^{3x+2y}$; $x = \cos t$; $y = t^2$.

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial u}, \dfrac{\partial f}{\partial v}$ con $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$; $x = u \operatorname{sen} v$; $y = u \cos v$.

(d) $\dfrac{\partial f}{\partial u}, \dfrac{\partial f}{\partial v}$ con $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{y}$; $x = v^2 - u$; $y = 5u$.

(e) $\dfrac{\partial f}{\partial u}, \dfrac{\partial f}{\partial v}, \dfrac{\partial f}{\partial t}$ con $f(x,y) = x^2 y$; $x = uvt$; $y = \dfrac{1}{v^2}$ $v \neq 0$.

SOLUCIÓN:

Podemos hacer el problema de dos formas. La primera es sustituyendo en la función $x$, $y$ por sus expresiones en las nuevas variables y realizar las derivadas que nos piden. La segunda es aplicando la regla de la cadena. Pondremos aquí las soluciones y al final explicaremos las dos maneras de hacerlo en alguno de los casos.

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{3t\left(3t^2+4\right)}{2\left(t^2+1\right)^{5/4}} \operatorname{cotg}\left(\dfrac{3t^2}{\sqrt[4]{t^2+1}}\right)$.

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial t} = (4t - 3\sin t)e^{2t^2+3\cos t}$.

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial v} = 1$.

(d) $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\sin\left(u-v^2\right) - u\cos\left(u-v^2\right)}{5u^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{2v\cos\left(u-v^2\right)}{5u}$.

(e) $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 2t^2 u$, $\dfrac{\partial f}{\partial v} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 2tu^2$.

En el caso del apartado (b) podemos sustituir directamente $x$, $y$ por sus expresiones y obtenemos $f(x,y) = e^{3\cos t + 2t^2}$. Derivando respecto a $t$ resulta

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (4t - 3\operatorname{sen} t)e^{3\cos t+2t^2}.$$

Si lo hacemos aplicando la regla de la cadena, vemos que estamos componiendo dos funciones $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, de manera que lo que tenemos es $f \circ g$, y entonces

$$(f \circ g)' = f'(g)g' = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Escribiendo las derivadas

$$(f \circ g)' = f'(g)g' = \left(3e^{3x+2y}, 2e^{3x+2y}\right)\begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ 2t \end{pmatrix} = (4t - 3\operatorname{sen} t)e^{3x+2y}.$$

Sustituyendo ahora $x$, $y$ por sus expresiones se llega al resultado ya visto antes.

En el caso del apartado (d) se procede de modo parecido, solo que ahora tenemos que la función $g$ es una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y queremos calcular $(f \circ g)'$, que ahora resulta ser

$$(f \circ g)' = f'(g)g' = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right).$$

Escribiendo las derivadas parciales que aparecen resulta

$$(f \circ g)' = f'(g)g' = \left(\frac{\cos x}{y}, \frac{-\operatorname{sen} x}{y^2}\right)\left(\begin{array}{cc} -1 & 2v \\ 5 & 0 \end{array}\right) = \left(-\frac{\cos x}{y} - 5\frac{\operatorname{sen} x}{y^2}, 2v\frac{\cos x}{y}\right)$$

y, sustituyendo las expresiones de $x$, $y$, se llega a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \left(-\frac{\cos(v^2-u)}{5u} - \frac{\operatorname{sen}(v^2-u)}{5u^2}, 2v\frac{\cos(v^2-u)}{5u}\right),$$

que es equivalente a la expresión dada en el solucionario. El mismo resultado se obtiene por sustitución directa de las expresiones de $x$, $y$ en $f(x,y)$. En efecto,

$$f(u,v) = \frac{\operatorname{sen}(v^2-u)}{5u}.$$

Derivando parcialmente respecto a $u$ y $v$ llegamos a

$$f_u = \frac{-5u\cos(v^2-u) - 5\operatorname{sen}(v^2-u)}{25u^2}, \quad f_v = \frac{2v\cos(v^2-u)}{5u}.$$

**7.** Hallar $\dfrac{\partial f}{\partial u}, \dfrac{\partial f}{\partial v}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}$, en los siguientes casos:

(a) $f(x,y) = x^3y^3 + x + 1$, con $x = u^2+v^2$; $y = e^{u+v}+1$.

(b) $f(x,y) = \log(x^2+y)$, con $x = e^{u+v^2}$; $y = u^2+v$.

(c) $f(x,y) = xy$, con $x = \log\sqrt{uv}$; $y = \log\sqrt{\dfrac{u}{v}}$.

(d) $f(x,y) = \log(xy)$, con $x = e^{uv^2}$; $y = e^{uv}$.

SOLUCIÓN:

Se trata de hacer lo mismo que en el problema anterior, pero hasta la segunda derivada.

(a) $f_u = 6u\left(u^2+v^2\right)^2\left(e^{u+v}+1\right)^3 + 3e^{u+v}\left(u^2+v^2\right)^3\left(e^{u+v}+1\right)^2 + 2u.$

$f_v = 6v\left(u^2+v^2\right)^2\left(e^{u+v}+1\right)^3 + 3e^{u+v}\left(u^2+v^2\right)^3\left(e^{u+v}+1\right)^2 + 2v.$

$$\begin{aligned} f_{uu} = {} & 6\left(u^2+v^2\right)^2\left(e^{u+v}+1\right)^3 + 24u^2\left(u^2+v^2\right)\left(e^{u+v}+1\right)^3 + 3e^{u+v}\left(u^2+v^2\right)^3\left(e^{u+v}+1\right)^2 + \\ & 36ue^{u+v}\left(u^2+v^2\right)^2\left(e^{u+v}+1\right)^2 + 6e^{2(u+v)}\left(u^2+v^2\right)^3\left(e^{u+v}+1\right) + 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{uv} = {} & 3\left(e^{u+v}+1\right)\left(u^2+v^2\right)\Big(e^{u+v}\left(u^2+v^2\right)^2\left(e^{u+v}+1\right) + 6ue^{u+v}\left(u^2+v^2\right)\left(e^{u+v}+1\right) + \\ & 6ve^{u+v}\left(u^2+v^2\right)\left(e^{u+v}+1\right) + 2e^{2(u+v)}\left(u^2+v^2\right)^2 + 8uv\left(e^{u+v}+1\right)^2\Big). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{vv} = {} & 6\left(u^2+v^2\right)^2\left(e^{u+v}+1\right)^3 + 24v^2\left(u^2+v^2\right)\left(e^{u+v}+1\right)^3 + 3e^{u+v}\left(u^2+v^2\right)^3\left(e^{u+v}+1\right)^2 + \\ & 36ve^{u+v}\left(u^2+v^2\right)^2\left(e^{u+v}+1\right)^2 + 6e^{2(u+v)}\left(u^2+v^2\right)^3\left(e^{u+v}+1\right) + 2. \end{aligned}$$

(b) $f_u = \dfrac{2\left(ue^{u^2+v} + e^{2\left(u+v^2\right)}\right)}{e^{u^2+v} + e^{2(u+v^2)}}.$ $\quad f_v = \dfrac{e^{u^2+v} + 4ve^{2\left(u+v^2\right)}}{e^{u^2+v} + e^{2(u+v^2)}}.$

$$f_{uu} = \frac{2e^{u^2+v}\left(\left(2u^2-4u+3\right)e^{2\left(u+v^2\right)} + e^{u^2+v}\right)}{\left(e^{u^2+v} + e^{2(u+v^2)}\right)^2}. \quad f_{uv} = -\frac{2(u-1)(4v-1)e^{u^2+2u+2v^2+v}}{\left(e^{u^2+v} + e^{2(u+v^2)}\right)^2}.$$

$$f_{vv} = \frac{e^{2\left(u+v^2\right)}\left(\left(16v^2-8v+5\right)e^{u^2+v} + 4e^{2\left(u+v^2\right)}\right)}{\left(e^{u^2+v} + e^{2(u+v^2)}\right)^2}.$$

(c) $f_u = \dfrac{\log u}{2u}.$ $\quad f_v = \dfrac{-\log v}{2v}.$ $\quad f_{uu} = \dfrac{1-\log u}{2u^2}.$ $\quad f_{uv} = 0.$ $\quad f_{vv} = \dfrac{-1+\log v}{2v^2}.$

(d) $f_u = v(v+1).$ $\quad f_v = 2uv+u.$ $\quad f_{uu} = 0.$ $\quad f_{uv} = 2v+1.$ $\quad f_{vv} = 2u.$

**8.** Estudiar los extremos relativos de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-3)^2$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$

(c) $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$

(d) $f(x,y) = 2xy - \dfrac{1}{2}(x^4+y^4) + 1$

(e) $f(x,y) = -x^2 - 5y^2 + 10x - 30y - 62$

(f) $f(x,y) = x^2 + 6xy + 10y^2 - 4y + 4$

(g) $f(x,y) = -xy(x+y+6)$

(h) $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x+y)$

(i)$f(x,y) = x^3 + y^3$

(j) $f(x,y) = (x-1)^2(y+4)^2$

SOLUCIÓN:

(a) $(1,3)$ mínimo relativo. (b) $(0,0)$ mínimo relativo. (c) $(-1,1)$ mínimo relativo.

(d) $(-1,-1)$ y $(1,1)$ máximos relativos. $(0,0)$ es un punto crítico, pero es un punto de silla.

(e) $(5,-3)$ máximo relativo. (f) $(-6,2)$ mínimo relativo.

(g) $(-2,-2)$ mínimo relativo. Hay tres puntos críticos más, $(0,0)$, $(-6,0)$ y $(0,-6)$, pero son puntos de silla.

(h) $(-\pi/2,-\pi/2)$ mínimo relativo. $(\pi/6,\pi/6)$ y $(5\pi/6,5\pi/6)$ máximos relativos. Hay otros tres puntos críticos $(-\pi/2,\pi/2)$, $(\pi/2,\pi/2)$ y $(\pi/2,-\pi/2)$ que son puntos de silla.

(i) $(0,0)$ es un punto crítico con hessiano nulo. Como $f(0,y)>0$ y $f(0,-y)<0$, no es ni máximo ni mínimo relativo.

(j) Todos los puntos de la forma $(1,y), y\in\mathbb{R}$ y $(x,-4), x\in\mathbb{R}$ son mínimos relativos.

Veamos de manera más detallada la solución del apartado (h). Los extremos relativos serán las soluciones comunes a las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} f_x = \cos x - \operatorname{sen}(x+y) = 0 \\ f_y = \cos y - \operatorname{sen}(x+y) = 0 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{l} \cos x = \operatorname{sen}(x+y) \\ \cos y = \operatorname{sen}(x+y) \end{array}\right.$$

Será pues $\cos x = \cos y$, es decir, $x = \pm y$. Si $x=y$, entonces $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$ y por tanto $\cos x = 2\operatorname{sen} x \cos x$, resultando o bien $\cos x = 0$ o bien $\operatorname{sen} x = 1/2$; es decir, o bien $x=\pm\pi/2$ o bien $x = \pi/6, 5\pi/6$y resultan los puntos críticos $(-\pi/2,-\pi/2), (\pi/2,\pi/2), (\pi/6,\pi/6), (5\pi/6,5\pi/6)$.

Si $x=-y$, entonces $\cos x = \operatorname{sen}(x+y) = 0$, es decir, $x=\pm\pi/2$. Resultan pues los puntos críticos $(\pi/2,-\pi/2)$, $(-\pi/2,\pi/2)$.

Para distinguir la naturaleza de estos puntos críticos tenemos que recurrir al determinante hessiano:

$$\mathcal{H} = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\operatorname{sen} y - \cos(x+y) \end{vmatrix}.$$

Para $(-\pi/2,\pi/2)$, $(\pi/2,-\pi/2)$ y $(\pi/2,\pi/2)$ se tiene $\mathcal{H}=-1$ por lo que estos puntos críticos son puntos de silla.

Para $(-\pi/2,-\pi/2)$ resulta $\mathcal{H}=3$ y $f_{xx}=2$, por lo que es un mínimo relativo. Los puntos $(\pi/6,\pi/6)$ y $(5\pi/6,5\pi/6)$ tienen la misma matriz hessiana y $\mathcal{H}=3/4$, por lo que se trata de máximos relativos.

**9.** Calcular los extremos absolutos de la función en la región $R$ (en todos los casos, $R$ contiene a sus puntos frontera):

(a) $f(x,y) = 12 - 3x - 2y$ donde $R$ es la región triangular del plano con vértices $(2,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$.

(b) $f(x,y) = x^2 + xy$, donde $R = \{(x,y) \mid |x|\le 2, |y|\le 1\}$.

(c) $f(x,y) = 1 + x + 2y$, donde $R = \{x\ge 0, y\le 0, x-y\le 1\}$.

(d) $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y)$, donde $R = \{(x,y) \mid 0\le x\le \pi/2, 0\le y\le \pi/2\}$.

(e) $f(x,y) = 2x - 2xy + y^2$; $R$ es la región del plano $XY$ acotada por las gráficas de $y=x^2$, $y=1$.

(f) $f(x,y) = \frac{4xy}{(x^2+1)(y^2+1)}$; $R = \{(x,y) \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

SOLUCIÓN:

(a) Máximo absoluto, 10, en $(x, y) = (0, 1)$ y mínimo absoluto, 5, en $(x, y) = (1, 2)$.

(b) Máximo absoluto, 6, en $(2, 1)$ y $(-2, -1)$ y mínimo absoluto, $-1/4$, en $(1/2, -1)$ y $(-1/2, 1)$.

(c) Máximo absoluto, 2, en $(1, 0)$ y mínimo absoluto, $-1$, en $(0, -1)$.

(d) Máximo absoluto, $\frac{3}{2}\sqrt{3}$, en $(\pi/3, \pi/3)$ y mínimo absoluto, 0, en $(0, 0)$.

(e) Máximo absoluto, 1, en (1,1) y mínimo absoluto, 0, en los segmentos $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$ y $x = 0$, $0 \leq y \leq 1$.

Vamos a ver un poco más desarrollado el apartado (b). La región $R$ es el rectángulo centrado en el origen y limitado por las rectas $x = \pm 2$, $y = \pm 1$.

Ya que $(f_x, f_y) = (2x + y, x)$, el único punto crítico de $f$ es el origen, con $f(0, 0) = 0$. El hessiano vale siempre $-1 < 0$, así que el origen es un punto silla. Habrá que buscar los extremos absolutos en la frontera. Y como la frontera son cuatro segmentos, hay que mirar caso por caso lo que pasa en cada uno de ellos

(i) Sobre $y = 1$, $-2 \leq x \leq 2$, es $f(x, 1) = x^2 + x$ y $f'(x, 1) = 2x + 1 = 0$, luego hay un mínimo relativo $x = -1/2$ con valor $f(-1/2, 1) = -1/4$.

(ii) Sobre $y = -1$, $-2 \leq x \leq 2$, es $f(x, -1) = x^2 - x$, luego hay otro mínimo relativo $x = 1/2$ con el mismo valor $f(1/2, -1) = -1/4$.

(iii) Sobre $x = \pm 2$, $-1 \leq y \leq 1$, es $f(2, y) = 4 \pm 2y$, que no tiene puntos críticos.

(iv) Sobre los vértices: $f(2, 1) = 6 = f(-2, -1)$, $f(-2, 1) = 2 = f(2, -1)$.

En definitiva, $f$ alcanza su valor máximo absoluto 6 en los puntos $(2, 1), (-2, -1)$ y el valor mínimo absoluto $-1/4$ en los puntos $(-1/2, 1), (1/2, -1)$.

**10.** Hallar los extremos de las siguientes funciones sujetas a la condición que se indica:

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ con la condición $x - 2yy + 6 = 0$.

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$ con la condición $2y - x^2 = 0$.

(c) $f(x, y) = 3x + y + 10$ con la condición $x^2 y = 6$.

(d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ con la condición $2x + 4y - 15 = 0$.

(e) $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ con la condición $x^2 + y^2 = 1$.

(f) $f(x, y) = e^{xy}$ con la condición $x^2 + y^2 = 8$.

(g) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con la condición $x + y + z - 6 = 0$.

(h) $f(x, y, z) = xyz$ con la condición $x + y + z - 6 = 0$.

(i) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ con la condición $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUCIÓN:

(a) Mínimo en $(2, 4)$ con $f(2, 4) = -12$.

(b) Mínimo en $(0, 0)$ con $f(0, 0) = 0$ y máximos en $(\pm\sqrt{2}, 1)$ con $f(\pm\sqrt{2}, 1) = 1$.

(c) Mínimo en $(\sqrt[3]{4}, \frac{3}{2}\sqrt[3]{4})$.
(d) Mínimo en $(3/2, 3)$ con $f(3/2, 3) = \frac{3}{2}\sqrt{5}$.

(e) Mínimo en $(4/5, 3/5)$ con $f(4/5, 3/5) = 1$ y máximo en $(-4/5, -3/5)$ con $f(-4/5, -3/5) = 11$.

(f) Mínimo en $(-2, 2)$ y $(2, -2)$ con $f(-2, 2) = f(2, -2) = e^{-4}$ y máximo en $(2, 2)$ y $(-2, -2)$ con $f(2, 2) = f(-2, -2) = e^4$.

(g) Mínimo en $(2, 2, 2)$ con $f(2, 2, 2) = 12$.

(h) Mínimo en $(6, 0, 0)$, $(0, 6, 0)$ y $(0, 0, 6)$ con $f = 0$ y máximo en $(2, 2, 2)$ con $f(2, 2, 2) = 8$.

(i) Extremos en $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$, $(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(0, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$, $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$.

**11.** Hallar los extremos de las siguientes funciones sujetas a dos condiciones:

$a$ $f(x,y,z) = xyz$ con las condiciones $x+y+z=32$, $\quad x-y+z=0$.

(b) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ con las condiciones $x+2z=6$, $\quad x+y=12$.

(c) $f(x,y,z) = xy+yz$ con las condiciones $x+2y=6$, $\quad x-3z=0$.

(d) $f(x,y,z) = xyz$ con las condiciones $x^2+z^2=5$, $\quad x-2y=0$.

(e) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ con las condiciones $x^2+y^2=1$, $\quad x+y+z=1$.

SOLUCIÓN:

(a) Máximo en $(8,16,8)$ con $f(8,16,8)=1024$.

(b) Mínimo en $(6,6,0)$ con $f(6,6,0)=72$.

(c) Máximo en $(3,3/2,1)$ con $f(3,3/2,1)=6$.

(d) Máximo relativo en $(0,0,-\sqrt{5})$ y mínimo relativo en $(0,0,\sqrt{5})$; en ambos puntos $f=0$. Máximo relativo y absoluto en $(2\sqrt{5/6},\sqrt{5/6},\sqrt{5/3})$ y $(-2\sqrt{5/6},-\sqrt{5/6},\sqrt{5/3})$ con $f=(5/3)^{3/2}$. Mínimo relativo y absoluto en $(2\sqrt{5/6},\sqrt{5/6},-\sqrt{5/3})$ y $(-2\sqrt{5/6},-\sqrt{5/6},-\sqrt{5/3})$ con $f=-(5/3)^{3/2}$.

(e) Mínimo relativo y absoluto en $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ con $f=1$. Máximo relativo en $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},1-\sqrt{2})$ con $f=4-2\sqrt{2}$. Máximo relativo y absoluto en $(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},1+\sqrt{2})$ con $f=4+2\sqrt{2}$.

Veamos un par de casos algo más desarrollados. Empezaremos por el apartado (b). En primer lugar podemos observar que, desde un punto de vista geométrico, nos piden calcular la distancia al origen (al cuadrado) de los puntos situados sobre una recta. Por lo que al encontrar los extremos nos encontraremos con un mínimo. La función de Lagrange resulta ser

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2+y^2+z^2+\lambda(x+2z-6)+\mu(x+y-12),$$

de donde

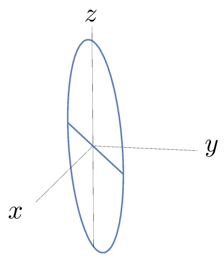
$$(F_x,F_y,F_z) = (2x+\lambda+\mu, 2y+\mu, 2z+2\lambda), \quad (F_\lambda,F_\mu) = (x+2z-6, x+y-12).$$

De $F_y=0$ y $F_z=0$ podemos despejar $\lambda$ y $\mu$, de manera que $\lambda=-z$ y $\mu=-2y$. Sustituyendo en la ecuación $F_x=0$ obtenemos $2x-2y-z=0$ que, junto con las ecuaciones de condición $F_\lambda=0$ y $F_\mu=0$, dan lugar a un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas con solución única $(6,6,0)$.

También puede hacerse el problema reduciéndolo a uno de una sola variable. En efecto, las dos condiciones permiten obtener $y$, $z$ en función de $x$. Sustituyendo en la expresión de la función $f$, llegamos a otra de una sola variable: $g(x)=f(x,12-x,\frac{6-x}{2})$; fácilmente se obtiene así un mínimo $f(6,6,0)=72$.

Veamos ahora un caso algo más complicado. Se trata del apartado (d). Como en el caso anterior, si se puede, conviene tener una idea de la naturaleza geométrica del problema. Esto es de gran ayuda si se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange.

La función $f$ asigna a cada punto $P(x,y,z)$ del espacio $\mathbb{R}^3$ el "volumen" (con signo) del paralelepípedo de caras paralelas a los planos coordenados, aristas paralelas a los ejes coordenados y diagonal $OP$, siendo $O$ el origen de coordenadas. La primera condición es la ecuación de un cilindro circular de eje $OY$. La segunda condición es la ecuación de un plano. Las dos condiciones juntas son las ecuaciones de la intersección del cilindro y el plano, que es una elipse, ya que el plano no es paralelo ni perpendicular al eje del cilindro. Se puede ver la elipse en la siguiente figura:



Como vemos, uno de los ejes de esta elipse es $OZ$ y el otro la recta $x - 2y = 0$ del plano $z = 0$. Así, la elipse pasa por los cuadrantes primero y tercero del semiespacio con $z \geq 0$, en los que $f(x, y, z) \geq 0$, y por los simétricos respecto al plano $z = 0$, en los que con $z \leq 0$ y $f(x, y, z) \leq 0$. Habrá dos máximos en la parte positiva de $z$, simétricos respecto de $Oz$ y sus simétricos respecto al otro eje (en la parte negativa de $z$) serán los mínimos. Ahora se trata de calcular las coordenadas de estos puntos y los valores extremos que en ellos toma la función dada. Vamos a ver cómo calcularlos.

Tomamos la función

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = xyz + \lambda(x^2 + z^2 - 5) + \mu(x - 2y)$$

y formamos el sistema $F_x = F_y = F_z = F_\lambda = F_\mu = 0$ que escribiremos a la izquierda, y a la derecha el que resulta de eliminar la variable $x$, que, por la última ecuación sabemos que es $x = 2y$:

$$\begin{cases} yz + 2\lambda x + \mu = 0 \\ xz - 2\mu = 0 \\ xy + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + z^2 = 5 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} yz + 4\lambda y + \mu = 0 \\ yz - \mu = 0 \\ y^2 + \lambda z = 0 \\ 4y^2 + z^2 = 5 \end{cases}$$

Veamos primero las soluciones con $y = 0$. En este caso $z = \pm\sqrt{5}$, con $\lambda = \mu = 0$ y en estos puntos $f(0, 0, \pm\sqrt{5}) = 0$. Estamos sobre los extremos del eje vertical de la elipse y en el caso del que se encuentra por encima del plano $XY$, con $z = \sqrt{5}$, tenemos un mínimo relativo, ya que $xyz$ es positivo en el semiespacio $z \geq 0$. Por el contrario, $(0, 0, -\sqrt{5})$ será un máximo relativo.

Ahora suponemos $y \neq 0$ y nos fijamos en el sistema de ecuaciones con la variable $x$ eliminada. De las dos primeras ecuaciones se elimina $\mu$ y se deduce que $z = -2\lambda$. Sustituyendo este valor en la tercera se obtiene $y^2 = 2\lambda^2$, de modo que en la cuarta queda $12\lambda^2 = 5$, es decir, $\lambda = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$, lo que permite obtener los puntos críticos $(x, y, z)$. Resulta el siguiente cuadro:

| punto | $\lambda$ | $x$ | $y$ | $z$ | $\mu$ | $f(x, y, z)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$ | $2\sqrt{\frac{5}{6}}$ | $\sqrt{\frac{5}{6}}$ | $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ | $-\frac{5}{3\sqrt{2}}$ | $-\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ |
| P' | $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$ | $-2\sqrt{\frac{5}{6}}$ | $-\sqrt{\frac{5}{6}}$ | $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ | $\frac{5}{3\sqrt{2}}$ | $-\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ |
| Q | $\lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$ | $2\sqrt{\frac{5}{6}}$ | $\sqrt{\frac{5}{6}}$ | $\sqrt{\frac{5}{3}}$ | $\frac{5}{3\sqrt{2}}$ | $\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ |
| Q' | $\lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$ | $-2\sqrt{\frac{5}{6}}$ | $-\sqrt{\frac{5}{6}}$ | $\sqrt{\frac{5}{3}}$ | $-\frac{5}{3\sqrt{2}}$ | $\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ |

Se observa claramente que los puntos $P, P'$, simétricos respecto al eje $Oz$, tienen coordenada $z$ negativa y valor negativo de $f$, así que son mínimos relativos y también absolutos de $f$ con las condiciones dadas. Análogamente, los puntos $Q, Q'$, simétricos respecto al eje $Oz$, tienen coordenada $z$ positiva y valor positivo de $f$, así que son máximos relativos y también absolutos de $f$ con las condiciones dadas. Es claro también que las parejas $P, P'$ y $Q, Q'$ son simétricas con respecto al plano coordenado $OXY \equiv z = 0$.

**12.** Una caja rectangular apoyada en el plano $XY$ debe tener un vértice en el origen y el vértice opuesto en el plano $6x + 4y + 3z = 24$. Calcular el volumen máximo posible de la caja.

SOLUCIÓN:

Volumen máximo $24/9$ cuando $(x, y, z) = (4/3, 2, 8/3)$.

Vamos a ver cómo llegar al resultado. La función de Lagrange es

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(6x + 4y + 3z - 24).$$

Para calcular los extremos condicionados debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} F_x = yz + 6\lambda = 0, \\ F_y = xz + 4\lambda = 0, \\ F_z = xy + 3\lambda = 0, \\ F_\lambda = 6x + 4y + 3z - 24 = 0. \end{cases}$$

Multiplicando $F_x$ por $x$, $F_y$ por $y$, $F_z$ por $z$ y sumando tenemos

$$xF_x + yF_y + zF_z = 3xyz + \lambda(6x + 4y + 3z) = 0.$$

Ahora bien, por la ecuación de condición $6x + 4y + 3z = 24$ y de esta forma obtenemos $\lambda = xyz/8$. Si sustituimos $\lambda$ en cada una de las tres primeras ecuaciones y tenemos en cuenta que buscamos un máximo, resulta $(x, y, z) = (4/3, 2, 8/3)$.

**13.** Hallar tres números positivos $x$, $y$, $z$ que satisfagan las condiciones indicadas:

(a) La suma es 30 y el producto es máximo.

(b) La suma es 32 y el producto $P = xy^2z$ es máximo.

SOLUCIÓN:

(a) $x = y = z = 10$ y el producto es igual a 1000.

(b) $x = 8$, $y = 16$, $z = 8$ y el producto $P = 16384$.

**14.** La suma de la longitud de la caja y el perímetro de la sección transversal de un paquete a entregar por un servicio de transportes urgente no puede pasar de 108 cm. Hallar las dimensiones del paquete de máximo volumen que puede enviarse por este servicio.

SOLUCIÓN:

Sean las dimensiones de la caja $x$, $y$, $z$, siendo su longitud $x$. El perímetro de la sección transversal es $2(y+z)$, por lo que queremos maximizar el volumen $V = xyz$ sujeto a la restricción $x+2(y+z) \leq 108$. La función que definimos es

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + 2y + 2z - 108).$$

De aquí se deduce que el volumen máximo se obtiene cuando la sección es cuadrada, siendo $y = z = 18\,\text{cm}$ y la longitud es $x = 36\,\text{cm}$. Con estas dimensiones el volumen máximo es $11664\,\text{cm}^3$.

**15.** El volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{es} \quad \frac{4\pi abc}{3}.$$

Probar que si $a + b + c = 5$, el elipsoide de volumen máximo es una esfera.

SOLUCIÓN:

Se trata de maximizar el volumen $V = \frac{4\pi abc}{3}$ con la condición $a + b + c = 5$. Definimos la función

$$F(a, b, c, \lambda) = \frac{4\pi abc}{3} + \lambda(a + b + c - 5).$$

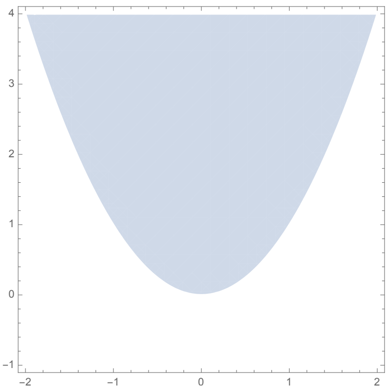
El volumen máximo es $500\pi/81$, cuando $a = b = c = 5/3$. Al ser los tres ejes iguales, se trata de una esfera.

**16.** (a) Determinar y representar gráficamente el dominio de la función $f(x, y) = \log(y - x^2)$.

(b) Calcular los extremos relativos de la función $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + 5$.

SOLUCIÓN:

(a) Tenemos $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 > 0\}$ que es el interior de la parábola $y = x^2$.




(b) Hay un máximo relativo para $(x, y) = (-1, -1)$ con $f(-1, -1) = 6$. En $(0, 0)$ hay un punto crítico, pero es un punto de silla.

**17.** Probar que la función $f(x, y) = \log\left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right]$ verifica la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

SOLUCIÓN:

Se trata del apartado (c) del problema 5. Ver ahí la solución.

**18.** Consideramos la función de dos variables $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 6y$.

(a) Hallar sus máximos y mínimos relativos.

(b) Calcular también los máximos y mínimos absolutos de dicha función sujetos a la condición $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUCIÓN:

(a) Hay un mínimo relativo en $(x, y) = (1, 3)$ con $f(1, 3) = -10$.

(b) Mínimo absoluto cuando $(x, y) = (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$ con $f = 1 - 2\sqrt{10}$. Máximo absoluto cuando $(x, y) = (-1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10})$ con $f = 1 + 2\sqrt{10}$.