Tema 1

Álgebra lineal

1.1. EL ESPACIO VECTORIAL $\mathbb{R}^n$. SUBESPACIOS

1.1.1. $\mathbb{R}^n$. Operaciones con vectores

Fijado un número natural $n \geq 1$, el espacio real n-dimensional $\mathbb{R}^n$ es el conjunto cuyos elementos, llamados *puntos*, son las n-tuplas ordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ de números reales, siendo x_i la i-ésima *coordenada* o *componente* de $(x_1, \ldots, x_n)$. Dos n-tuplas son iguales si y sólo si tienen las mismas componentes.

Ejemplos. (i) $(1, 2, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$, $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ y no tiene sentido comparar por igualdad los vectores anteriores. (ii) Si $(2, 1) = (a, b)$ en $\mathbb{R}^2$ entonces $a = 2$ y $b = 1$. (iii) $(2, 0, 4) \neq (2, 1, 4) \neq (4, 2, 8)$ en $\mathbb{R}^3$.

Si concebimos cada punto $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ como un segmento dirigido que empieza en el *origen* $(0, \ldots, 0)$ y termina en dicho punto, entonces decimos que tenemos el *vector*

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n).$$

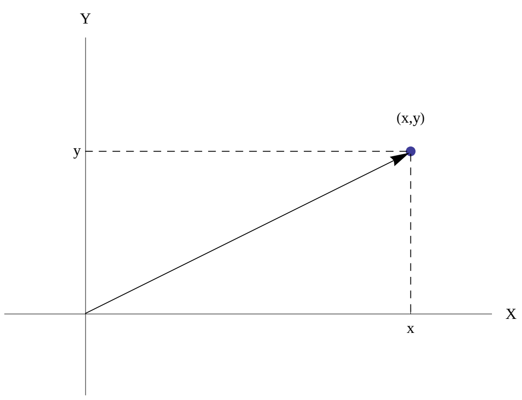
Notación: Existen diversas maneras de denotar a los vectores. En la anterior definición hemos utilizado la *flechita* $\vec{x}$ habitual en Física. En textos de matemáticas es más habitual encontrarse con $\overline{x}$ o simplemente la negrita $\mathbf{x}$. En lo que sigue nosotros utilizaremos la primera de ellas. Habitualmente se emplean las letras $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ para referirnos a vectores, x, y, z, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para hacer referencia a componentes de vectores, y t, s, $t_1, t_2 \ldots, t_n$ para denotar escalares (números reales).

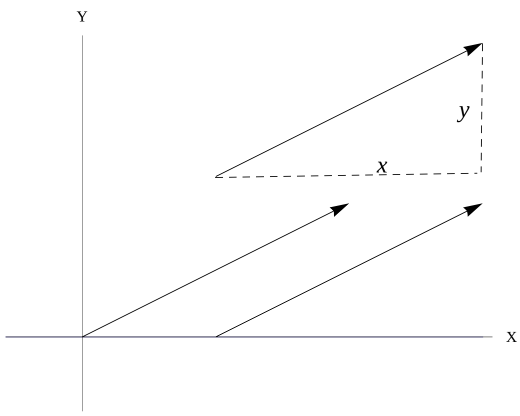
Se dice que son *vectores libres* porque se pueden aplicar en cualquier punto según el esquema

$$\text{punto} + \text{vector} = \text{punto}.$$

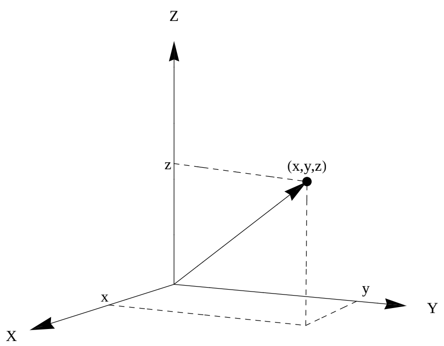
Así, el vector $\vec{x}$ anterior aplicado en el punto $(a_1, \ldots, a_n)$ da el punto $(a_1 + x_1, \ldots, a_n + x_n)$.

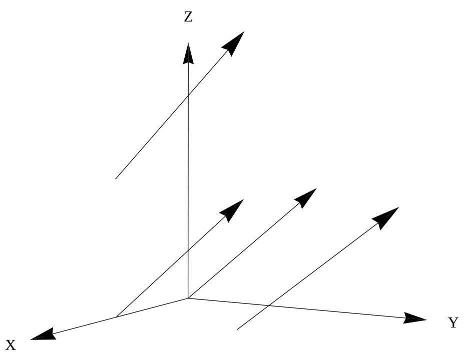
- Si $n = 2$: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, el plano. Cada elemento de $\mathbb{R}^2$ puede interpretarse como un punto-vector en el plano, o como un vector libre en el plano:





- Si $n = 3$: $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$, el espacio. Cada elemento de $\mathbb{R}^3$ puede interpretarse como un punto-vector en el espacio, o como un vector libre en el espacio:





Con los vectores del espacio $\mathbb{R}^n$ se pueden realizar muchas operaciones (suma, producto por un escalar, producto escalar, producto vectorial, producto mixto,...) y cada una de ellas tiene sus aplicaciones. De momento consideraremos sólo las dos primeras, la suma y el producto por un escalar, que son las llamadas *operaciones lineales*.

Se dice que $\mathbb{R}^n$ es el *espacio vectorial real n-dimensional* cuando sus elementos son considerados como vectores sometidos a las dos operaciones lineales:

— **Suma de vectores**. La suma de dos vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ es el siguiente vector de $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

— **Producto de un escalar por un vector**. El producto de un escalar $t \in \mathbb{R}$ por un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es el siguiente vector de $\mathbb{R}^n$:

$$t\vec{x} = (tx_1, \ldots, tx_n).$$

Ejemplo. $(1, 3, 2, 0) + (2, 3, 4, -3) = (3, 6, 6, -3)$; $\quad 4(1, 0, -3) = (4, 0, -12)$.

Estas operaciones lineales tienen las siguientes propiedades, cuya comprobación es inmediata:

— Propiedades de la suma:

- Asociativa: $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$.
- Conmutativa: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.
- Vector nulo $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$: $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$.
- Vector opuesto $-\vec{x} = (-1)\vec{x}$: $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.

— Propiedades del producto por un escalar:

- Escalar unidad: $1\vec{x} = \vec{x}$.
- Doble escalar: $t(s\vec{x}) = (ts)\vec{x}$.

— Propiedades mixtas:

- Distributiva del escalar: $(t + s)\vec{x} = t\vec{x} + s\vec{x}$.
- Distrtibutiva del vector: $t(\vec{x} + \vec{y}) = t\vec{x} + t\vec{y}$.

Estas operaciones se pueden realizar sucesivamente un número finito de veces.

Definición 1. Diremos que un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ es *combinación lineal* de los vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$ si existen escalares (números reales) $t_1, \ldots, t_r$, tales que

$$\vec{v} = t_1\vec{v}_1 + \cdots + t_r\vec{v}_r.$$

Ejemplos. (i) En $\mathbb{R}^3$, el vector $(5,13,2)$ es combinación lineal de los vectores $(2,1,2)$ y $(1,4,0)$ pues $(5,13,2) = 1(2,1,2) + 3(1,4,0)$.

(ii) En $\mathbb{R}^3$, el vector $(1,1,1)$ no es combinación lineal de los vectores $(0,1,1)$ y $(0,2,1)$.

(iii) En $\mathbb{R}^n$, sea la familia de vectores $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, donde $\vec{e}_i$ tiene todas las coordenadas nulas excepto la que ocupa el lugar i, que vale 1; cada vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es combinación lineal de la familia anterior, siendo los escalares las propias componentes del vector:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

Definición 2. Diremos que los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ de $\mathbb{R}^n$ son *linealmente independientes* (o que la familia de vectores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ es *libre*) si

$$\boxed{t_1\vec{v}_1 + \cdots + t_r\vec{v}_r = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad t_1 = t_2 = \cdots = t_r = 0}$$

En caso contrario se dice que la familia de vectores es *linealmente dependiente* o *ligada*. Es claro que cualquier familia de vectores que contenga al vector nulo no es libre; que si una familia de vectores es libre, ningún vector de la misma puede ser combinación lineal de los demás; y que cualquier subfamilia (subconjunto) de una familia libre de vectores también es libre.

Ejemplos. (i) Los vectores $(1,2), (1,3)$ de $\mathbb{R}^2$ son linealmente independientes, pues si $t_1(1,2)+t_2(1,3) = (0,0)$ entonces $(t_1+t_2, 2t_1+3t_2) = (0,0)$, es decir, $t_1+t_2 = 0 = 2t_1+3t_2$; por tanto $t_1 = t_2 = 0$.

(ii) Los vectores $(1,2)$ y $(2,4)$ son linealmente dependientes, pues $2(1,2) + (-1)(2,4) = (0,0)$.

(iii) En $\mathbb{R}^4$, la familia de vectores $\{\vec{x} = (1,2,4,5), \vec{y} = (0,2,0,0), \vec{z} = (0,0,3,1), \vec{u} = (0,0,0,4)\}$ es libre, luego también lo son sus subfamilias $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}\}$ y $\{\vec{z}, \vec{u}\}$.

(iv) En $\mathbb{R}^n$, la familia de vectores $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es libre.

(v) También lo es la siguiente familia *triangular*, con $a_{ii} \neq 0$:

$$\{(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (0, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (0, 0, \dots, a_{nn})\}.$$

1.1.2. Rango de una familia finita de vectores

Definición 3. El *rango* de una familia finita de vectores de $\mathbb{R}^n$ es el máximo número de vectores linealmente independientes que existen en dicha familia. Nótese que basta que una familia contenga algún vector no nulo para que su rango sea, al menos, 1.

Teorema 1. *(i) En $\mathbb{R}^n$, el rango de cualquier familia de vectores es menor o igual que n.*

(ii) Si una familia de n vectores de $\mathbb{R}^n$ tiene rango n, entonces todo vector de $\mathbb{R}^n$ es combinación lineal de los vectores de la familia.

La condición (ii) del teorema anterior se expresa diciendo que n vectores de $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes *engendran* (o *generan*) todo el espacio vectorial, y también que forman una *base* de $\mathbb{R}^n$. (Para que una familia de vectores engendre todo $\mathbb{R}^n$, esa familia tiene que tener n vectores o más; para que sea base, debe tener exactamente n vectores.)

Ejemplos. (i) El rango de la familia formada por los vectores $(1,2,4,5)$, $(0,2,0,0)$, $(0,0,3,1)$ y $(0,0,0,4)$ es 4, pues son linealmente independientes.

(ii) El rango de la familia $\{(1,2,4), (0,2,0), (0,0,0)\}$ es 2, pues los dos primeros vectores son linealmente independientes y el vector nulo es superfluo a los efectos de la independencia lineal.

El cálculo del rango es particularmente simple en algunos casos; en particular, cuando los vectores presentan una disposición «triangular» como la del ejemplo antes mencionado. En general, para calcular rangos se usa un procedimiento que consiste en efectuar cambios o transformaciones en los vectores de modo que el rango de las familias sucesivas no varíe y al final se alcanza la disposición triangular. Los cambios consisten en sucesiones finitas de los *cambios elementales* que se indican en la proposición siguiente.

Teorema 2. *El rango de un sistema de vectores no varía si se realiza uno cualquiera de los siguientes cambios elementales:*

(i) Intercambiar entre sí dos vectores de la familia.

(ii) Multiplicar un vector por un escalar no nulo.

(iii) Sumarle a un vector un múltiplo escalar de otro.

Así obtenemos que:

1. $\mathrm{rg}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_k, \ldots, \vec{v}_r\} = \mathrm{rg}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_r\}$.
$\mathrm{rg}\{(1,3,4), (-2,4,1), (1,0,1)\} = \mathrm{rg}\{(1,3,4), (1,0,1), (-2,4,1)\}$.

2. $\mathrm{rg}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_r\} = \mathrm{rg}\{\vec{v}_1, \ldots, s \cdot \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_r\}$ $\forall s \in \mathbb{R},\ s \neq 0$.
$\mathrm{rg}\{3,-1), (2,3)\} = \mathrm{rg}\{2 \cdot (3,-1), (2,3)\} = \mathrm{rg}\{(6,-2), (2,3)\}$

3. $\mathrm{rg}\{(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_k, \ldots, \vec{v}_r\} = \mathrm{rg}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_k + t\vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_r\}$ $\forall t \in \mathbb{R}$
$\mathrm{rg}\{(1,2), (2,3)\} = \mathrm{rg}\{(1,2), (2,3) + (-2) \cdot (1,2)\} = \mathrm{rg}\{(1,2), (0,-1)\}$.

Ejemplos. Calculemos el rango de algunas familias:

(i) $\{(1,2), (3,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{matrix} (1,2) \\ (3,1) \end{matrix} \sim \begin{matrix} (1,2) \\ (0,-5) \end{matrix}$$

El rango de la segunda familia es 2, luego el de la primera también es 2.

(ii) $\{(1,1,1), (3,3,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{matrix} (1,1,1) \\ (3,3,3) \end{matrix} \sim \begin{matrix} (1,1,1) \\ (0,0,0) \end{matrix}$$

El rango de la segunda familia es 1, luego el de la primera también es 1.

(iii) $\{(1,0,0,4), (3,3,3,0), (2,0,0,8), (1,1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{matrix} (1,0,0,4) \\ (3,3,3,0) \\ (2,0,0,8) \\ (1,1,1,1) \end{matrix} \sim \begin{matrix} (1,0,0,4) \\ (0,3,3,-12) \\ (0,0,0,0) \\ (0,1,1,-3) \end{matrix} \sim \begin{matrix} (1,0,0,4) \\ (0,1,1,-3) \\ (0,3,3,-12) \\ (0,0,0,0) \end{matrix} \sim \begin{matrix} (1,0,0,4) \\ (0,1,1,-3) \\ (0,0,0,-3) \\ (0,0,0,0) \end{matrix}$$

El rango de la cuarta familia es 3, pues los tres primeros vectores son linealmente independientes (el último no lo es pues es el vector nulo de $\mathbb{R}^4$), luego el de la primera también es 3.

1.1.3. Subespacios vectoriales. Sistemas generadores y bases

Definición 4. Un *subespacio vectorial* del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, es un subconjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^n$ que cumple:

(i) $\forall\ \vec{v}, \vec{w}\ \in S, \qquad \vec{v} + \vec{w} \in S$.

(ii) $\forall\ t \in \mathbb{R}$ y $\forall\ \vec{v}\ \in S, \qquad t\vec{v} \in S$.

Notación:

(a) Que S sea subespacio de $\mathbb{R}^n$, se denota $S \leq \mathbb{R}^n$.

(b) La definición anterior equivale a decir que cualquier combinación lineal de vectores de S es otro vector de S (se dice que S es *cerrado* por combinaciones lineales).

Ejemplos. (i) $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n, \qquad \{\vec{0}\} \leq \mathbb{R}^n$.

(ii) Todos los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ contienen al $\vec{0}$.

(iii) El conjunto de los vectores que son combinación lineal de una familia de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ de $\mathbb{R}^n$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, y se denota como $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r \rangle$. Es decir,

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r \rangle = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{v} = t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \cdots + t_r\vec{v}_r, \text{ con } t_i \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^n.$$

Definición 5. Dado $S \leq \mathbb{R}^n$, si $S = \langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$, se dice que la familia $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es un *sistema generador* del subespacio vectorial S. El mismo subespacio vectorial S admite sistemas generadores diferentes.

Ejemplos. (i) En $\mathbb{R}^n$, la familia de vectores $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es un sistema generador del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

(ii) Las cuatro familias $\{(1,1,-2),\ (2,-1,1),\ (3,-3,4),\ (4,-5,7)\}$, $\{(1,1,-2),(2,-1,1),(3,-3,4)\}$, $\{(1,1,-2),\ (2,-1,1)\}$ y $\{(1,1,-2),\ (2,-1,1),\ (4,-5,7)\}$ son sistemas generadores de un mismo subespacio $S \leq \mathbb{R}^3$.

Definición 6. Se llama *base de un subespacio vectorial* a cualquier sistema generador de dicho subespacio formado por una familia libre de vectores.

Teorema 3 (Estructura de los subespacios vectoriales)**.** *Todo subespacio vectorial S no nulo de $\mathbb{R}^n$ admite una base. Dos bases del mismo subespacio vectorial constan del mismo número de elementos.*

Definición 7. Se llama *dimensión de un (sub)espacio vectorial* al número de vectores que componen cualquier base de dicho (sub)espacio. Coincide con el rango de cualquier sistema generador del (sub)espacio.

Ejemplos. (i) En $\mathbb{R}^n$, la familia de vectores $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ es base del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, llamada *base canónica* y $\dim(\mathbb{R}^n)=n$.

(ii) Las familias $\{(1,1,-2),(2,-1,1)\}$ y $\{(1,-2,3),(3,0,-1)\}$ son base del subespacio vectorial que generan, de dimensión 2.

(iii) No son base del subespacio vectorial que generan, de dimensión 2, las familias $\{(1,1,-2),(2,-1,1),(3,-3,4)\}$ y $\{(1,1,-2),(2,-1,1),(4,-5,7)\}$.

Propiedades:

(a) $S \leq T \implies \dim(S) \leq \dim(T)$.

En particular, $S \leq \mathbb{R}^n \implies \dim(S) \leq n$.

(b) $S \leq T$ y $\dim(S)=\dim(T) \implies S=T$.

En particular, $S \leq \mathbb{R}^n$ y $\dim(S)=n \implies S=\mathbb{R}^n$.

(c) Si $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_r\}$ es una familia libre de vectores del (sub)espacio vectorial V y $\dim(V)=k$, entonces $r \leq k$.

En particular, $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_r\}$ familia libre de vectores de $\mathbb{R}^n \implies r \leq n$.

1.2. MATRICES

Definición 8 (Matriz de números reales)**.** Una *matriz* A de *orden* $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ es un cuadro de números reales dispuestos en m filas y n columnas:

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

El conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ se denota $\mathcal{M}(m \times n)$. Una matriz con igual número n de filas y de columnas se llama *cuadrada* de orden n, y el conjunto de todas ellas se denota por $\mathcal{M}(n)=\mathcal{M}(n \times n)$. Se llama *diagonal principal* de la matriz A al conjunto ordenado formado por los elementos $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$.

La matriz se escribe en la forma abreviada $A=(a_{ij})$ siendo a_{ij} al número real que ocupa la intersección de la fila i-ésima con la columna j-ésima. Dos matrices $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ son iguales si son del mismo orden y sus elementos con índices iguales coinciden: $a_{ij}=b_{ij}$ para cada i,j.

Ejemplo. No son iguales las matrices A y B siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2 \times 3), \qquad B=\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2).$$

La diagonal principal de B está formada por los elementos $9,1$.

Algunos tipos de matrices que usaremos con frecuencia son los siguientes:

- Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se llama triangular superior si $a_{ij} = 0$ cuando $i > j$, es decir, si los elementos por debajo de la diagonal principal son cero.
- Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se llama triangular inferior si $a_{ij} = 0$ cuando $i < j$, es decir, si los elementos por encima de la diagonal principal son cero.
- Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se llama *diagonal* si todos los elementos que no están en la diagonal principal son nulos. Es decir, si es triagular superior e inferior a la vez.
- Un ejemplo muy particular de matriz diagonal es la *matriz unidad* o *matriz identidad* de orden n, cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1; se denota mediante I_n. Otro ejemplo es la *matriz nula* de orden n formada por todo ceros, y que se representa por 0_n.
- Una *matriz fila* es una matriz de orden $1 \times n$.
- Una *matriz columna* tiene orden $m \times 1$.

1.2.1. Las matrices como vectores. El espacio vectorial $\mathcal{M}(m \times n)$

Las matrices de $\mathcal{M}(m \times n)$ se suman y se multiplican por escalares como los vectores, componente a componente, y tienen las mismas propiedades; se tratan como si fuera un vector de $\mathbb{R}^{mn}$ escrito en una disposición particular (de hecho $\mathcal{M}(m \times n)$ es un espacio vectorial de dimensión mn).

Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -10 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \; A + B = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -10 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \; 7A = \begin{pmatrix} 21 & -35 & 0 \\ 35 & 7 & 14 \end{pmatrix}.$$

Los vectores suelen escribirse como matrices fila, pero en algunos momentos conviene considerarlos como matrices columna. Una matriz puede ser considerada como una familia de vectores fila o bien como una familia de vectores columna. Trasponer una matriz consiste en intercambiar sus filas y columnas, lo que altera su orden si no es cuadrada.

Definición 9. La matriz *traspuesta* de una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ es la matriz $A^t = (a_{ji})$ de orden $n \times m$. Notemos que las filas de A^t son las columnas de A y viceversa; por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Una matriz cuadrada A es *simétrica* si y sólo si $A = A^t$ y es *antisimétrica* si y sólo si $A = -A^t$.

Las principales propiedades de la trasposición son las siguientes:

$$(A^t)^t = A, \quad (A + B)^t = A^t + B^t, \quad (sA)^t = s(A^t).$$

1.2.2. Rango de una matriz

Dada una matriz A de orden $m \times n$, podemos considerar sus filas como vectores de $\mathbb{R}^n$ o sus columnas como vectores de $\mathbb{R}^m$.

Definición 10. El *rango* de la matriz $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, denotado por $\operatorname{rg} A$, es el máximo número de filas de A que son linealmente independientes (es decir, la dimensión del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ engendrado por los vectores fila).

Es posible definir el rango por columnas en lugar de filas pero, afortunadamente, se demuestra que el rango de una matriz resulta ser el mismo ya sea calculado por filas o por columnas. Usaremos, en general, el cálculo del rango de la familia finita de vectores de $\mathbb{R}^n$ formada por las filas de A.

Método de Gauss. Este método consiste en transformar la matriz manteniendo invariante el rango, pero introduciendo ceros hasta llegar a una matriz triangular, cuyo rango es evidente. Las transformaciones elementales a efectuar son (ver Teorema 2):

1. Cambiar el orden de las filas de la matriz.
2. Multiplicar una fila por un número distinto de cero.
3. Sumar a una fila otra u otras multiplicadas por algunos números.

Denotaremos con el símbolo $\sim$ el paso de una matriz a otra mediante transformaciones elementales. Se dice que ambas matrices son equivalentes.

Ejemplos. (i) Cálculo del rango de una matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El primer paso es hacer ceros las primeras componentes de las filas 2, 3 y 4. Para ello restamos a cada una de ellas un múltiplo adecuado de la primera fila. Intercambiando el orden de las filas llegamos a otra matriz equivalente. El último paso es hacer cero la segunda componente de la tercera fila; para ello, le restamos tres veces la segunda fila, llegando a una matriz escalonada con tres filas linealmente independientes. En consecuencia podemos asegurar que el rango de esta matriz es tres.

(ii) El rango de la matriz B es 3:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) La matriz C tiene rango 4 (el máximo posible):

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.2.3. El determinante de una matriz cuadrada

A cada matriz cuadrada A de orden n se le asocia un número real mediante sumas de productos de elementos de la matriz, teniendo en cuenta su disposición rectangular en filas y columnas. Este número se llama el *determinante* de A, se representa como $|A|$ o como $\det(A)$. Si la matriz se indica como $A = (a_{ij})$, el determinante se señala con barras verticales: $\det(A) = |A| = |a_{ij}|$.

En los casos de orden pequeño el determinante se define así:

(i) Si $n = 1$ es $A = (a)$ y $|A| = a$.

(ii) Si $n = 2$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

(iii) Si $n = 3$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) \\ \qquad - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) \end{cases}$$

Estos casos sencillos responden a la siguiente definición general:

Definición 11. El *determinante* de una matriz cuadrada de orden n es la suma de todos los productos de n elementos

$$a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$$

tomados cada uno de fila y columna distinta (hay $n!$ productos de este tipo), afectado cada producto de un signo $\pm$ según el «orden» de la permutación $j_1, \dots, j_n$ (no vamos a explicar con cuidado qué significa el «orden» de la permutación).

Caso particular: el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

El cálculo de un determinante puede hacerse reduciéndolo a determinantes de tamaño decreciente. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Llamaremos *menor complementario* del elemento a_{ij} al determinante M_{ij} de la matriz que resulta de suprimir en A la fila i y la columna j, que es una matriz cuadrada de orden $n-1$. Se llama *adjunto* del elemento a_{ij} al número $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Teorema 4. El determinante de una matriz cuadrada es la suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) por sus adjuntos respectivos,

$$\boxed{|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + \dots + a_{in} A_{in}}$$

o

$$\boxed{|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + \dots + a_{nj} A_{nj}}$$

Este método tiene valor teórico pero, empleado directamente, no es demasiado eficaz. Sin embargo, su eficacia aumenta si se combina con propiedades que permiten hacer ceros en la matriz hasta llegar incluso a una matriz triangular.

Las propiedades principales de los determinantes son:

- $|A| = |A^t|$.
- Si en un determinante intercambiamos dos filas (columnas), el determinante cambia de signo. En particular, el determinante vale 0 si la matriz tiene dos filas (columnas) iguales.
- Si se multiplica una fila (columna) de una matriz A por un número t, el determinante de la nueva matriz es el determinante de A multiplicado por t. Como consecuencia, si A es de orden n, $|tA| = t^n |A|$.
- Si en un determinante se suma a una fila (columna) un múltiplo escalar de otra, el determinante no se altera.
- Si una fila (columna) es combinación lineal de las demás, el determinante vale 0 (y recíprocamente). En particular, el determinante vale 0 si la matriz tiene una fila (columna) de ceros.

Determinantes y rango de una matriz. El cálculo del rango de una matriz puede hacerse utilizando determinantes, aunque es poco práctico si la matriz no es muy sencilla: *El rango de una matriz A de orden $m \times n$ coincide con el orden del mayor menor no nulo de A posible.* Un *menor* de A es el determinante de cualquier matriz cuadrada obtenida de A suprimiendo filas y columnas.

1.2.4. Producto de matrices. Matriz inversa

Definición 12. Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}(n \times p)$ llamaremos *producto de A por B* a la matriz $AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times p)$ dada por

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$$

Cuando los productos indicados son posibles, se cumplen las siguientes propiedades:

- Asociativa: $A(BC) = (AB)C$.
- Elemento neutro: Si $A \in \mathcal{M}(m \times n)$ se verifica $I_m A = AI_n = A$
- Distributiva del producto con respecto de la suma: $A(B+C) = AB+AC$ y $(B+C)A = BA+CA$.
- El determinante de un producto de matrices cuadradas es el producto de sus determinantes: $|AB| = |A||B|$.

En general, el producto de matrices no es conmutativo. Si $A \in \mathcal{M}(m \times n)$ y $B \in \mathcal{M}(n \times m)$ tienen sentido, las multiplicaciones $AB \in \mathcal{M}(m \times m)$ y $BA \in \mathcal{M}(n \times n)$. Para que AB y BA sean iguales es necesario que $m = n$, pero incluso en ese caso pueden ser diferentes.

Definición 13. Si A es una matriz cuadrada en $\mathcal{M}(n)$ diremos que A es una matriz *inversible* si existe una matriz cuadrada A' del mismo orden que verifica $A'A = AA' = I_n$. Si existe, esta matriz es única, la llamaremos *matriz inversa* de A y la denotaremos por A^{-1}; las ecuaciones que la definen son

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n.$$

Si A es inversible, entonces:

- Su inversa también lo es y se tiene $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Su traspuesta también lo es y se tiene $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- Si dos matrices cuadradas del mismo orden son inversibles, su producto también lo es y se verifica $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Interesa saber cuándo una matriz cuadrada tiene inversa, y calcular ésta cuando sea posible. Para ello, se llama *matriz adjunta* de A a la matriz $A^* = (A_{ij})$ que tiene por elementos los adjuntos de cada uno de los elementos de A, de modo que, según el Teorema 4, se verifica $A(A^*)^t = |A|I_n$, fórmula que permite calcular la inversa de A si su determinante $|A|$ es distinto de cero.

Teorema 5. *Una matriz cuadrada A tiene inversa si y sólo si $|A| \neq 0$, y en tal caso la inversa es*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^*)^t}$$

Una alternativa para calcular la inversa de una matriz es *el método de Gauss-Jordan* siguiente: a partir de la matriz A construimos la matriz $(A|I_n)$ y mediante operaciones elementales con las filas de la matriz, hay que obtener una matriz de la forma $(I_n|B)$. Si A tiene rango n este proceso se realiza normalmente y la matriz B es la inversa de A, $B = A^{-1}$. Si el rango de A es menor que n, como la matrices que vamos obteniendo en el proceso son equivalentes, en alguno de los pasos intermedios obtendremos una fila que será cero y nunca podremos obtener la matriz $(I_n|B)$ a partir de $(A|I_n)$.

Ilustremos este procedimiento con dos ejemplos.

Ejemplos. Calcular la inversa de las siguientes matrices, en caso de que existan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos el método de Gauss-Jordan para el calculo de la inversa de la matriz A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right),$$

con lo cual

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Tratemos ahora de hacer lo mismo con la matriz B:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Podemos observar que a partir de aquí es imposible obtener la matriz identidad en la parte de la izquierda, pues una de las filas correspondientes a la matriz B se nos ha anulado. Esto nos dice que el rango de B es 2 y por tanto no tiene inversa.

1.3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Definición 14. Un *sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas* es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \cdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Los $a_{ij} \in \mathbb{R}$ son los *coeficientes*, las x_i son las *incógnitas* y los $b_j \in \mathbb{R}$ son los *términos independientes*. Un sistema se llama *homogéneo* si todos los términos independientes son nulos.

Una *solución* del sistema es un punto $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas verifican todas las ecuaciones.

Notemos que el sistema se puede escribir de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \text{es decir,} \quad AX = B,$$

donde $A = (a_{ij})$ es la matriz de los coeficientes, X la matriz columna de las incógnitas y B es la matriz columna de los términos independientes. Se dice que A es la *matriz del sistema*. Se llama *matriz ampliada* a la que se obtiene añadiendo, a la derecha de la matriz del sistema, la columna de los términos independientes; se representa por $(A|B)$, y siempre ocurre que $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg}(A|B)$.

Un sistema se llama *homogéneo* si tiene todos los términos independientes nulos, así que su matriz ampliada es $(A|0)$ y se tiene $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|0)$. Cuando el sistema es homogéneo las soluciones las escribiremos en forma de vectores $\vec{x}$ porque el conjunto de todas ellas forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ (es el sistema de las ecuaciones implícitas del subespacio vectorial).

No sucede los mismo si $B \neq 0$. Si S es el subespacio vectorial de soluciones del sistema homogéneo asociado y $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ es una solución cualquiera del sistema completo, el conjunto de todas las soluciones es

$$\vec{p} + S = \{\vec{p} + \vec{x} \mid \vec{x} \in S\}.$$

Se dice que un sistema es *compatible* si tiene solución, en caso contrario es *incompatible*. Un sistema homogéneo siempre es compatible, pues tiene al menos la *solución trivial* $\vec{0}$. Si es compatible y además tiene solución única se denomina *compatible determinado*, mientras que si tiene infinitas soluciones (dependientes de parámetros) se llama *compatible indeterminado*.

Teorema 6 (de Rouché-Frobenius)**.** *El sistema $AX = B$ es compatible si y sólo si* $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|B)$. *Además, si el sistema es compatible, $r = \operatorname{rg} A$ y n es el número de incógnitas, se verifica:*

(i) Si $r = n$, entonces el sistema es compatible determinado.

(ii) Si $r < n$, entonces el sistema es compatible indeterminado y existen infinitas soluciones dependientes de $n-r$ parámetros (la dimensión del subespacio vectorial de soluciones del sistema homogéneo asociado).

El *método de Gauss* puede aplicarse para calcular el rango de las matrices A y $(A|B)$. Además, si aplicamos operaciones elementales a las filas de la matriz ampliada se obtienen matrices de *sistemas equivalentes* (es decir, que tienen las mismas soluciones). Por tanto, aplicando varias operaciones elementales llegamos a una matriz triangular, que representa un sistema de ecuaciones lineales equivalente que ya es obvio solucionar.

Apliquemos este método con algunos ejemplos:

Ejemplo. Este sistema de ecuaciones es especialmente sencillo ya que la matriz de los coeficientes es triangular:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Podemos observar que el $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B) = 3$, por tanto es un sistema compatible determinado. Para hallar su solución, gracias a que el sistema es escalonado, operando de abajo hacia arriba resulta $x_3 = -1$, $x_2 = 1$ y $x_1 = 0$.

Ejemplo. Estudiar y resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Escribimos en forma matricial la matriz ampliada y la escalonamos mediante operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right).$$

En este caso obtenemos que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B) = 4$, y el sistema compatible determinado equivalente

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = 1 \\ & -2x_2 & & +3x_4 & = 1 \\ & & x_3 & +2x_4 & = 3 \\ & & & x_4 & = 1 \end{array}\right.$$

tiene solución única $(0, 1, 1, 1)$.

Otros sistemas compatibles determinados son:

$$(a) \left\{\begin{array}{cccc} 2x & +y & -z & = 3 \\ x & -2y & +2z & = 1 \\ 2x & +y & +z & = 5 \end{array}\right. \qquad (b) \left\{\begin{array}{cccc} 2x & +y & +4z & = 0 \\ x & +y & +7z & = 0 \\ x & -y & +13 & = 0 \end{array}\right.$$

Ejemplo. El siguiente es un sistema compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & +y & +z & = 0 \\ x & -2y & +2z & = 0 \\ 2x & -y & +3z & = 0 \end{array}\right.$$

Se tiene $r = 2$, $n = 3$, de modo que la solución depende de un parámetro. En efecto, la tercera ecuación es la suma de las dos primeras, que son independientes, por lo que la solución general del sistema se expresa como la ecuación paramétrica

$$\left\{\begin{array}{cc} x & = -4t \\ y & = t \\ z & = 3t \end{array}\right.$$

del subespacio vectorial $S = \langle(-4, 1, 3)\rangle$ de las soluciones. Este ejemplo es una ilustración del caso general homogéneo que se deduce del Teorema 6.

Corolario 7. *Sea el sistema $AX = B$. Si X_0 una solución particular del sistema $AX = B$ (es decir, se cumple $AX_0 = B$), entonces el conjunto de todas las soluciones es $X_0 + S$, donde S es el subespacio vectorial de soluciones del sistema lineal homogéneo $AX = 0$, subespacio de dimensión $n - r$, con n el número de incógnitas y r el rango de A.*

Ejemplo. Veamos ahora un caso de incompatibilidad:

$$\begin{cases} x & +2y & -3z & +5w & = 0 \\ 2x & +y & -4z & -w & = 1 \\ x & +y & +z & +w & = 0 \\ x & -y & -z & -6w & = 4 \end{cases}$$

Una primera obtención de ceros nos lleva a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -11 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -11 & 4 \end{array}\right),$$

donde claramente se aprecia que las filas (ecuaciones) segunda y cuarta son incompatibles. Avanzando en la obtención de ceros resulta la matriz equivalente

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -11 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

en la que se calcula fácilmente $\operatorname{rg} A = 3 \neq 4 = \operatorname{rg}(A|B)$ y salta a la vista la incompatibilidad.

Como ejercicios algo más laboriosos se suele incluir la resolución de sistemas entre cuyos coeficientes aparece un parámetro (o varios), de modo que se debe hacer una discusión de las condiciones de resolubilidad según los valores de dicho parámetro. Por ejemplo, vamos a encontrar, en función del parámetro a, las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + (a-1)y + z = 2 \\ x + y - az = a \end{cases}$$

Aplicando el método de Gauss resulta

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & a-1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -a & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & a-2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & a-2 \end{array}\right).$$

Si $a \neq 0, 2$, entonces el rango es máximo (3) y el sistema (compatible determinado) tiene solución única, fácil de calcular aprovechado el sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ (a-2)y + z = 2 \\ -az = a - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{2a-1}{a} \\ y = \frac{1}{a} \\ z = \frac{2-a}{a} \end{cases}$$

Si $a = 0$ entonces $\operatorname{rg} A = 2 \neq 3 = \operatorname{rg}(A|B)$, luego el sistema es incompatible, no tiene soluciones. (Nota: la incompatiblidad se aprecia en el sistema dado, pues con $a = 0$ se tiene $2 = x + y = 0$. También se aprecia en la última ecuación del sistema reducido triangular, $0 = -2$.)

Si $a = 2$ entonces $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B) = 2$, luego el sistema (compatible indeterminado) tiene infinitas soluciones, dependientes de un parámetro:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 0 \end{cases}$$

Obsérvese que la solución es suma de una solución particular $(0, 2, 0)$ y del subespacio, solución del sistema homogéneo, $S = \langle(1, -1, 0)\rangle$.

Un sistema lineal compatible determinado con igual número de ecuaciones que de incógnitas se puede resolver usando determinantes.

Teorema 8 (Regla de Cramer)**.** *Un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ de orden $n \times n$ y con $|A| \neq 0$, tiene una única solución dada por:*

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

donde A_i es la matriz resultante de sustituir en A la i-ésima columna por la columna de los términos independientes.

El coste operacional de esta regla es mucho más elevado que el del método de Gauss. Por ejemplo, si quisiéramos resolver un sistema con 25 ecuaciones y 25 incógnitas por la regla de Cramer, tendríamos que calcular unos cuantos determinantes de tamaño 25×25. Esto conlleva un número de 25! sumandos como los de la Definición 11 (y cada sumando es un producto de 25 factores). Si suponemos que cada operación (suma o producto) realizada en un ordenador requiere una billonésima de segundo (algo todavía inviable), se necesitarían unos 372 billones de segundos, es decir, casi 12 millones años para realizar los cálculos. Con este ejemplo se quiere poner de manifiesto que no basta con conocer un método para resolver un problema, hace falta además que dicho método sea eficiente. A pesar de estas fuertes limitaciones, incluimos aquí la regla de Cramer, aunque sea a modo testimonial, porque es viable para sistemas con tamaño pequeño (2×2 o 3×3).

Ejemplo. Vamos a usar la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{llll} -x & +2y & -3z & = 1 \\ 2x & & +z & = 0 \\ 3x & -4y & +4z & = 2 \end{array}\right.$$

El determinante de la matriz de coeficientes no es nulo,

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 10,$$

así que el sistema tiene una solución única, que será de la forma

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{4}{5}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{10} = -\frac{3}{2}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{10} = -\frac{8}{5}.$$

Nota. Hemos aprendido que los sistemas de ecuaciones *lineales* o no tienen solución, o tienen una, o tienen infinitas. En un sistema no lineal se pueden presentar otras situaciones. Por ejemplo, el siguiente sistema (no lineal)

$$\begin{cases} xy + 3x - y = 3 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

tiene tres soluciones reales: $(1, 3)$, $(1, -3)$ y $(-1, -3)$. Queda como ejercicio resolverlo. En un tema posterior comprobaremos que cada sistema no lineal es un mundo y que los métodos para resolverlos, si existen, pueden ser totalmente distintos de un caso a otro.

1.4. VALORES Y VECTORES PROPIOS

De ahora en adelante sólo utilizaremos matrices cuadradas $A = (a_{ij})$ de orden n, que podemos ver como aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dadas por $f(\vec{v}) = A\vec{v}$, de modo que $f(\vec{e}_i)$ es el vector columna i-ésimo de la matriz A.

Si la matriz A es diagonal y los elementos de su diagonal principal son $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, se verifica $A\vec{e}_i = \lambda_i \vec{e}_i$, para $i = 1, \dots, n$.

En ocasiones interesa encontrar, si existen, vectores no nulos $\vec{v}$ cuya imagen $f(\vec{v})$ sea proporcional a $\vec{v}$, es decir, tales que exista un escalar λ verificando $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Si esta ecuación se cumple con $\vec{v} \neq \vec{0}$, el escalar λ es único y los vectores proporcionales a $\vec{v}$ la cumplirán también.

La expresión $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ es un producto matricial con el vector en forma de columna

$$A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

que escribiremos habitualmente en la forma $(A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$, que es un sistema lineal homogéneo con un parámetro λ.

Definición 15. Dada una matriz cuadrada A de orden n, decimos que un número real λ es un *valor propio* o *autovalor* de A si existe un vector no nulo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $(A - \lambda I_n)\vec{v} = 0$. Entonces el vector $\vec{v}$ se dice *vector propio* (o *autovector*) asociado al valor propio λ.

Fijado un valor propio λ, los vectores propios asociados forman un subespacio vectorial que denotamos $S(\lambda)$ y al que llamamos *subespacio propio* asociado a λ. Dicho subespacio es el de soluciones del sistema lineal homogéneo $(A - \lambda I_n)\vec{v} = 0$. Esto nos da la clave para determinar primero los autovalores y luego los autovectores asociados a ellos. En efecto, que este sistema lineal homogéneo tenga soluciones no nulas exige que su determinante se anule.

Definición 16. Se llama *polinomio característico* de A al determinante

$$p(\lambda) = |A - \lambda I_n|,$$

que es un polinomio de grado n. La ecuación $p(\lambda) = 0$ es la *ecuación característica* de A.

Teorema 9. *Las raíces reales del polinomio característico (soluciones de la ecuación característica) de una matriz A son los valores propios de A.*

Si λ es un valor propio de A se denota con $m(\lambda) \geq 1$ su multiplicidad como raíz del polinomio característico. Si los valores propios son $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, será $m(\lambda_1) + \cdots + m(\lambda_r) \leq n$, sin que pueda asegurarse la igualdad por la posible presencia de raíces complejas, de modo que $n - r$ ha de ser par.

Teorema 10. *(i) Vectores propios con valores propios distintos son linealmente independientes.*

(ii) Dado un valor propio λ, se verifica $1 \leq \dim(S(\lambda)) \leq m(\lambda)$.

Ejemplo. Hallar los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 1 & a-2 \end{pmatrix}$.

Se tiene $p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2a \\ 1 & a-2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (2-a)\lambda - 2a = (\lambda - a)(\lambda + 2) = 0$, luego los valores propios son $\lambda = a, -2$.

Para el valor propio $\lambda = a$ son vectores propios los (x, y) que cumplen

$$\begin{pmatrix} -a & 2a \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, $x = 2y$, o sea $S(a) = \langle (2, 1) \rangle$.

Para el valor propio $\lambda = -2$ son vectores propios los (x, y) que cumplen

$$\begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, $x + ay = 0$, o sea $S(-2) = \langle (-a, 1) \rangle$.